МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГОРОДСКОГО ХОЗЯЙСТВА имени А. Н. БЕКЕТОВА

А. А. Кузнецова

МАТЕМАТИКА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для иностранных студентов подготовительного отделения

Харьков
ХНУГХ им. А. Н. Бекетова
2019

УДК 51(075.8)
К89

Автор

Кузнецова Анна Анатольевна, старший преподаватель кафедры высшей математики Харьковского национального университета городского хозяйства имени А. Н. Бекетова

Рецензенты:

Сидоров Максим Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Харьковского национального университета радиоэлектроники;

Коваленко Людмила Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Харьковского национального университета городского хозяйства имени А. Н. Бекетова

Рекомендовано к печати Ученым советом ХНУГХ им. А. Н. Бекетова,
протокол № 12 от 6 июля 2018 г.

Кузнецова А. А.

К89 Математика : учебное пособие : для иностр. студентов подгот. отделения / А. А. Кузнецова ; Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова. – Харьков : ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2019. – 199 с.

Учебное пособие предназначено для иностранных граждан, обучающихся на подготовительных отделениях украинских вузов. Пособие содержит объем учебной информации, необходимый для успешного продолжения образования в Украине.

Пособие состоит из самостоятельных, логически завершенных разделов, содержащих теоретические сведения, новые слова и выражения, а также языковые и математические упражнения.

В начале каждого раздела дается словарь с переводом на два языка: английский и французский.

УДК 51(075.8)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математика – фундаментальная естественная дисциплина, это «язык, на котором написана книга природы» (Галилео Галилей). С помощью математического языка можно описать и решить любую задачу по физике, химии, биологии и другим дисциплинам (не только техническим, но и гуманитарным).

Основная цель преподавания дисциплины «Математика» на подготовительном отделении для иностранных слушателей заключается в подготовке студентов к обучению в высших учебных заведениях Украины.

Учебное пособие содержит основной материал по таким разделам математики, как: «Арифметика», «Алгебра и начала математического анализа», «Геометрия». Объем учебной информации, содержащийся в пособии, соответствует программе по математике для подготовительных факультетов для иностранных граждан.

Пособие состоит из двух разделов: первый – «Вводный курс. Арифметика», второй – «Алгебра и начала математического анализа. Элементы геометрии», а разделы – из нескольких тем, которые, в свою очередь, состоят из занятий, каждое из которых раскрывает определенную тему, содержащую теоретический материал и примеры, иллюстрирующие вводимые математические понятия и термины. Вначале каждого занятия размещен словарь новых слов с переводом на английский и французский языки. Также в занятия включены упражнения двух типов: на закрепление вычислительных навыков и на отработку вводимой математической лексики, часть из которых студенты выполняют во время аудиторных занятий под руководством преподавателя, а часть – самостоятельно дома. В конце каждой темы есть вопросы для самоконтроля и модель контрольной работы по изученной теме.

ВВОДНЫЙ КУРС. АРИФМЕТИКА

ЗАНЯТИЕ 1

1.1 Цифры и числа

Словарь новых слов

Русский	**Английский**	**Французский**
Арифметика	Arithmetic	Arithmétique
Цифра	Figure, digit	Chiffre
Цифры	Figures, digites	Chiffres
Знак	Sign	Signe
Математические знаки	Mathematical signs	Signes mathématiques
Ноль	Zero	Zéro
Считать	To count	Compter

Цифра – это письменный знак, изображающий число. Для записи чисел используется десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Числа
(запись и чтение)

0 – нуль (ноль)
1 – один (единица)
2 – два
3 – три
4 – четыре
5 – пять
6 – шесть
7 – семь
8 – восемь
9 – девять
10 – десять (один десяток)
11 – одиннадцать
12 – двенадцать
13 – тринадцать
14 – четырнадцать
15 – пятнадцать
16 – шестнадцать
17 – семнадцать
18 – восемнадцать
19 – девятнадцать
20 – двадцать (два десятка)
21 – двадцать один
22 – двадцать два
23 – двадцать три
24 – двадцать четыре
25 – двадцать пять
26 – двадцать шесть
27 – двадцать семь
28 – двадцать восемь
29 – двадцать девять
30 – тридцать (три десятка)
31 – тридцать один
32 – тридцать два
……………………
39 – тридцать девять
40 – сорок (четыре десятка)
41 – сорок один
……………………
49 – сорок девять
50 – пятьдесят (пять десятков)
51 – пятьдесят один
……………………
59 – пятьдесят девять
60 – шестьдесят (шесть десятков)
……………………
64 – шестьдесят четыре
……………………
70 – семьдесят (семь десятков)

79 – семьдесят девять
……………………
80 – восемьдесят (восемь десятков)
……………………
83 – восемьдесят три
……………………
90 – девяносто (девять десятков)
……………………
100 – сто (одна сотня)
101 – сто один
102 – сто два
………………..
110 – сто десять
……………….
119 – сто девятнадцать
120 – сто двадцать
……………….
129 – сто двадцать девять
130 – сто тридцать
……………….
140 – сто сорок
150 – сто пятьдесят
………………
160 – сто шестьдесят
………………
170 – сто семьдесят
………………
180 – сто восемьдесят
………………
190 – сто девяносто
………………
199 – сто девяносто девять
200 – двести (две сотни)
………………
300 – триста (три сотни)
………………
400 – четыреста (четыре сотни)
………………
500 – пятьсот (пять сотен)
………………
600 – шестьсот (шесть сотен)
………………
700 – семьсот (семь сотен)
………………

800 – восемьсот (восемь сотен)
………………
900 – девятьсот (девять сотен)
………………
1 000 – тысяч**а** (одна тысяч**а**)
……………….
2 000 – две
3 000 – три
4 000 – четыре
тысяч**и**
………………
5 000 – пять
6 000 – шесть
………………
20 000 – двадцать
тысяч
……………..
100 000 – сто тысяч
………………
200 000 – двести тысяч
………………
1 000 000 – миллион (один миллион)
………………
2 000 000 – два
3 000 000 – три
4 000 000 – четыре
миллион**а**
………………
5 000 000 – пять
6 000 000 – шесть
……………….
20 000 000 – двадцать
миллион**ов**

1 000 000 000 – миллиард (один миллиард или тысяча миллионов)
………………

2 000 000 000 – два
3 000 000 000 – три
4 000 000 000 – четыре
миллиард**а**
……………….
5 000 000 000 – пять
6 000 000 000 –шесть
……………….
20 000 000 000 – двадцать
миллиард**ов**
……………

ЗАПОМНИТЕ!

Один	десят**ок**	Мужской род
Два Три Четыре	десят**ка**	
Пять …… двадцать	десят**ков**	
Одна	сотн**я**	Женский род
Две Три Четыре	сотн**и**	
Пять …… двадцать	сотен	
Одна	тысяч**а**	Женский род
Две Три Четыре	тысяч**и**	
Пять …… двадцать	тысяч	
Один	миллион	Мужской род
Два Три Четыре	миллион**а**	
Пять …… двадцать	миллион**ов**	

Упражнения

1. Прочитайте слова и выражения:

цифра – цифры;
знак – знаки;
математический знак – математические знаки;
число – числа;
натуральное число – натуральные числа;
целое число – целые числа;
ноль – нули;
десяток – десятки;
сотня – сотни;
тысяча – тысячи;
миллион – миллионы;
считать – считайте.

2. Прочитайте числа:

11, 13, 19, 23, 27, 36, 39, 41, 88, 101, 125, 271, 499, 890, 913, 1 235, 4 111, 10 777, 257 901, 1 000 000, 9 000 542.

3. Напишите числа цифрами:

семь, двенадцать, восемнадцать, девятнадцать, двадцать два, сорок четыре, шестьдесят восемь, сто семьдесят один, одна тысяча триста сорок девять, тридцать тысяч восемьдесят один, двадцать миллионов сто тысяч пятнадцать.

4. Что такое цифра? Назовите цифры.

1.2 Однозначные и многозначные числа

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Однозначное число	One digit number	Nombre a un chiffre
Двузначное число	Two digit number	Nombre a deux chiffre
Многозначное число	Many digit number	Nombre a plusieurs chiffre
И т. д. (и так далее)	And so on (et cetera (etc.)	Ainsi de suite (et cetera (etc.)

Числа, состоящие из одной цифры, являются **однозначными**. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – однозначные числа.

Числа, состоящие из двух цифр, являются **двузначными**. 10, 11, 12,…, 99 – двузначные числа.

Числа, состоящие из трёх цифр, являются **трёхзначными**. 100,101, 102,…, 999 – трёхзначные.

Числа, состоящие из четырёх цифр, являются **четырёхзначными**. 1 000, 1 001, …, 9 999 – четырёхзначные.

Двузначные, трёхзначные, четырёхзначные числа и т. д. являются **многозначными**.

Упражнения

5. Прочитайте двузначные числа:

3478; 2; 85; 490; 38 576; 82; 90; 66 529; 11; 304; 2 985 476; 3; 22; 90; 9 473; 41; 777; 68.

6. Прочитайте многозначные числа:

8 888; 0; 635; 2; 479; 100; 4; 6 591; 23; 777; 3 002; 1 000 008; 8; 5 469; 902; 444; 3 010;10 000; 21 001.

7. Ответьте на вопросы:

а) Какие числа называются однозначными? Приведите примеры.

б) Какие числа называются двузначными? Приведите примеры.
в) Какие числа называются трёхзначными? Приведите примеры.
г) Какие числа называются четырёхзначными? Приведите примеры.
д) Какие числа называются многозначными? Приведите примеры.

1.3 Натуральные числа. Чётные и нечётные числа. Числовые множества

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Числовые множества	Numeric sets	Ensembles numériques
Натуральные числа	Natural numbers	Nombre naturel
Множество натуральных чисел	Set of natural numbers	Ensemble de nombres naturels
Целые числа	Whole numbers	Nombres entiers
Множество целых чисел	Set of integers	Ensemble d'entiers
Чётное число	Even number	Nombre pair
Нечётное число	Odd number	Nombre impair
Рациональные числа	Rational numbers	Nombres rationnels
Множество рациональных чисел	Set of rational numbers	Ensemble de nombres rationnels
Иррациональные числа	Irrational numbers	Nombres irrationnels
Множество иррациональных чисел	Set of irrational numbers	Ensemble de nombres irrationnels
Действительные числа	Real numbers	Nombres réels
Множество действительных чисел	Set of real numbers	Ensemble de nombres réels

$1,2,3,...,n,...$ – это **натуральные** числа $(n \in N)$, N – **множество натуральных** чисел.

0 – не натуральное число $(0 \notin N)$.

$...,-n,...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...,n,...$ – это **целые** числа $(n \in Z)$, Z – **множество целых** чисел.

$2,4,6,...,k,...$ – это **чётные** числа $(k = 2n,\ n \in Z)$.

$1,3,5,...,k,...$ – это **нечётные** числа $(k = 2n-1,\ n \in Z)$.

$\frac{m}{n}$ – это **рациональные** числа $(m \in Z, n \in N)$, Q – **множество рациональных** чисел. Например: $\frac{2}{3};\ -\frac{5}{4};\ 0,7;\ -9;\ 123$.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \ldots$ – это **иррациональные** числа, т. е. числа, которые нельзя записать в виде бесконечной периодической дроби; I – **множество иррациональных** чисел.

Рациональные и иррациональные числа образуют **множество действительных** R чисел. Например: –2,5; 2 300; $\sqrt[3]{13}$.

Упражнения

8. Прочитайте слова и выражения:

натуральное число – натуральные числа;
множество натуральных чисел;
чётное число – чётные числа;
нечётное число – нечётные числа;
целое число – целые числа;
множество целых чисел;
рациональное число – рациональные числа;
множество рациональных чисел;
иррациональное число – иррациональные числа;
множество иррациональных чисел;
действительное число – действительные числа;
множество действительных чисел.

9. Прочитайте и напишите в тетрадь чётные числа:

35, 4, 87, 983, 90, 66 657, 42 987, 48, 44 427, 52, 10, 100 000, 127, 2 378, 122, 2 590.

10. Прочитайте и напишите в тетрадь нечётные числа:

72, 41, 1 035, 19 830, 789, 45, 1, 0, 299 909, 123, 467, 21, 888, 1 111, 119, 3, 51, 41, 3 479.

11. Ответьте на вопросы:

а) Какие числа называются натуральными? Приведите примеры.
б) Как обозначают множество натуральных чисел?
в) Какие числа называются целыми? Приведите примеры.
г) Как обозначают множество целых чисел?
д) Какие числа называются чётными? Приведите примеры.
е) Какие числа называются нечётными? Приведите примеры.
ж) Какие числа называются рациональными? Приведите примеры.
з) Как обозначают множество рациональных чисел.
и) Какие числа называются иррациональными? Приведите примеры.
к) Какие числа называют действительными?
л) Как обозначают множество действительных чисел?

ЗАНЯТИЕ 2

2.1 Основные математические знаки

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Плюс	Plus	Plus
Минус	Minus	Moins
Умножить на …	Tomultiplyby …	Multiplierpar …
Разделить на …	Todivideby …	Diviserpar …
Равно (получится)	Equal	Égal
Не равно	Not equal	Pas égal
Приближенно равно	Approximately equal	A peu près égale
Тождественно равно	Identically equal	Identiquement égal
Больше	Bigger	Plus grand
Меньше	Smaller	Plus petit
Или	Or	Ou, soit
Скобка	Bracket	Parenthése
Круглая скобка	Bracket	Parenthése
Квадратная скобка	Square bracket	Crochet
Фигурная скобка	Figure bracket	Accolade
Открывать (скобки)	To open (bracket)	Ouvrir (des parenthéses)
Открыть (скобки)	To open (bracket)	Ouvrir (des parenthéses)
Закрывать (скобки)	Bracket is closed	Fermer (des parenthéses)
Закрыть (скобки)	Bracket is closed	Fermer (des parenthéses)

$+$ плюс

$-$ минус

$\cdot$ $(\times)$ умножить на … (что?)

: (/) разделить на … (что?)

$=$ равно (чему?) или получится (что?)

$\neq$ не равно (чему?)

$\approx$ приближённо равно (чему?)

$\equiv$ тождественно равно (чему?)

$>$ больше (чего?) или больше, чем (что?)

$<$ меньше (чего?) или меньше, чем (что?)

$\geq$ больше или равно (чему?) или больше или равно, чем (что?)

$\leq$ меньше или равно (чему?) или меньше или равно, чем (что?)

( ) круглые скобки

[ ] квадратные скобки

{ } фигурные скобки

Например: $100+5$ «сто плюс пять»; $44-13$ «сорок четыре минус тринадцать»; $51\cdot 2$ «пятьдесят один умножить на два»; $74:12$ «семьдесят четыре разделить на двенадцать»; $11\cdot 3=33$ «одиннадцать умножить на три равно тридцати трём» или «одиннадцать умножить на три получится тридцать три»; $99 > 61$ «девяносто девять меньше шестидесяти одного» или «девяносто девять больше, чем шестьдесят один»; $0 < 7$ «ноль меньше семи» или «ноль меньше, чем семь»; $17 \neq 18$ «семнадцать не равно восемнадцати»; $1000 \equiv 1000$ «тысяча тождественно равна тысяче»; $1{,}999 \approx 2$ «одна целая девятьсот девяносто девять тысячных приближённо равны двум целым»; $z \geq 55$ «число зэт больше или равно пятидесяти пяти» или «число зэт больше или равно, чем число пятьдесят пять»; $x \leq 2$ «число икс меньше или равно двух» или «число икс меньше или равно, чем число два».

Скобки читаем так:

(		круглую	
[	открыть (что?)	квадратную	скобку
{		фигурную	

или

(		круглую	
[	открываем (что?)	квадратную	скобку;
{		фигурную	

)		круглую	
]	закрыть (что?)	квадратную	скобку
}		фигурную	

или

)		круглую	
]	закрываем (что?)	квадратную	скобку
}		фигурную	

ЗАПОМНИТЕ!

Равно (чему?) Дательный падеж	0 – нулю 1 – единице (одному) 2 – двум 3 – трём 4 – четырём 5 – пяти 6 – шести 7 – семи ……….. 10 – десяти 11 – одиннадцати ………….. 20 – двадцати 21 – двадцати одному …………..

Равно (чему?) Дательный падеж	30 – тридцати ………….. 34 – тридцати четырём ………….. 40 – сорока ………… 45 – сорока пяти ………… 50 – пятидесяти ………… 60 – шестидесяти ………… 80 – восьмидесяти ………… 90 – девяноста ………… 99 – девяноста девяти 100 – ста

2.2 Греческий алфавит

Буква	Транскрипция	Буква	Транскрипция	Буква	Транскрипция	Буква	Транскрипция
Α α	альфа	Η η	эта	Ν ν	ню	Τ τ	тау
Β β	бета	Θ θ	тэта	Ξ ξ	кси	ϒ υ	ипсилон
Γ γ	гамма	Ι ι	йота	Ο o	омикрон	Φ φ	фи
Δ δ	дельта	Κ κ	каппа	Π π	пи	Χ χ	хи
Ε ε	эпсилон	Λ λ	лямда	Ρ ρ	ро	Ψ ψ	пси
Ζ ζ	дзета	Μ μ	мю	Σ σ	сигма	Ω ω	омега

2.3 Латинский алфавит

Буква	Транскрипция	Буква	Транскрипция	Буква	Транскрипция	Буква	Транскрипция
$A\ a$	а	$H\ h$	аш (ха)	$O\ o$	о	$V\ v$	вэ
$B\ b$	бэ	$I\ i$	и	$P\ p$	пэ	$W\ w$	дубль-вэ
$C\ c$	цэ	$J\ j$	жи (йот)	$Q\ q$	ку	$X\ x$	икс
$D\ d$	дэ	$K\ k$	кА	$R\ r$	эр	$Y\ y$	игрек
$E\ e$	э	$L\ l$	эль	$S\ s$	эс	$Z\ z$	зэт
$F\ f$	эф	$M\ m$	эм	$T\ t$	тэ		
$G\ g$	жэ (гэ)	$N\ n$	эн	$U\ u$	у		

Вместе с основными математическими знаками в математике используют дополнительные математические знаки. Прочитать их перевод и значение можно в Приложении А.

Упражнения

12. Прочитайте слова и выражения:

умножить; умножить на два;
разделить; разделить на три;
равно; два плюс три равно пяти;
получится; четыре минус два получится два;
больше; пять больше, чем два;
меньше; два меньше, чем пять;
круглая скобка; круглые скобки;
открыть; открывать; открываем;
открыть круглую скобку;
открыть квадратную скобку;
открываем фигурную скобку;
закрыть, закрывать, закрываем;
закрыть круглую скобку;
закрыть квадратную скобку;
закрываем фигурную скобку.

13. Прочитайте и запишите на русском языке:

$3+2=5$; $7>2$; $11-4=7$; $1<5$; $3\cdot 5=15$; $a\geq b$; $18\div 9=2$; $c\leq d$.

14. Прочитайте и запишите на русском языке:

$90:\left\{3\cdot\left[19-(56:14+5)\right]\right\}=3$.

15. Запишите цифрами:

а) тридцать один плюс два получится тридцать три;
б) двадцать восемь минус восемь равно двадцати;
в) открываем круглую скобку, десять плюс восемь разделить на два, закрываем круглую скобку, умножить на четыре равно пятидесяти шести;
в) сто шестнадцать больше, чем сто одиннадцать;
г) миллион три меньше, чем девятьсот девяносто девять миллионов;
д) сорок умножить на девятнадцать получится семьсот шестьдесят;
е) семнадцать разделить на семнадцать равно одному.

16. Ответьте на вопросы:

а) Какие основные математические знаки Вы знаете?
б) Какие дополнительные математические знаки Вы знаете?

ЗАНЯТИЕ 3

3.1 Арифметические действия

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Арифметические действия	Arithmetical operations	Opérations arithmétiques
Действие	Operation	Opération
Компонент	Component	Composant
Сложение	Addition	Addition
Слагаемое	Item	Terme
Сумма	Sum	Somme
Результат	Result	Résultat
Вычитание	Subtraction	Soustraction
Уменьшаемое	Minuend	Le plus grand nombre
Вычитаемое	Subtrahend	Nombre á soustraire
Разность	Difference	Difference
Умножение	Multiplication	Multiplication
Множитель	Multiplier	Multiplicateur
Множители (сомножители)	Multipliers	Multiplicateurs
Произведение	Product	Produit
Деление	Division	Division
Делимое	Dividend	Dividende
Делитель	Divisor	Diviseur
Частное	Quotient	Quotient
Нельзя (разделить)	One may not (divide)	On ne peut pas (diviser)
Решать, решить	To solve	Résoudre
Больше, чем …	Bigger than	Plus grand que
Меньше, чем …	Smoller, less than	Inférieur a
Выполнить	To carry out; to do	Effectuer
Называться	To be called	Se nommer; s´appeler
На сколько больше…	By how much is bigger than	De combien plus grand
Во сколько раз больше …	How many times …, is bigger than	De combien plus petit
Как называется …?	What is it called …?	Comment s´appeler ..?

Сложение $a+b=c$,

компоненты сложения: a, b – *слагаемые*, c – *сумма*

$3+5=8$ – это действие сложения.

Читаем так: три плюс пять получится восемь или три плюс пять равно восьми;
3 – это слагаемое,
5 – это тоже слагаемое,
8 – это сумма.

Сумма – это результат сложения.

Вычитание $a-b=c$,

компоненты вычитания: a – *уменьшаемое*, b – *вычитаемое*,
c – *разность*

$7-3=4$ – это действие вычитания.
Читаем так: семь минус три получится четыре, или семь минус три равно четырём.
7 – это уменьшаемое,
3 – это вычитаемое,
4 – это разность.

Разность – это результат вычитания.

Умножение $a \cdot b=c$,

компоненты умножения: a, b – *множители* (*сомножители*),
c – *произведение*

$5 \cdot 3=15$ – это действие умножения.
Читаем так: пять умножить на три получится пятнадцать, или пять умножить на три равно пятнадцати.
5 – это множитель,
3 – это тоже множитель,
5 и 3 – это множители или сомножители,
15 – это произведение.

Произведение – это результат умножения.

$a \cdot 0=0$ – число a умножить на ноль получится ноль.

Деление $a:b=c$,

компоненты деления: a – *делимое*, b – *делитель*, c – *частное*

$32:2=16$ или $\frac{32}{2}=16$ или $32 \div 2=16$ – это действие деления.
Читаем так: тридцать два разделить на два получится шестнадцать,
или: тридцать два разделить на два равно шестнадцати.
32 – это делимое,
2 – это делитель,
16 – это частное.

Частное – это результат деления.

$0:a=0$ – ноль разделить на число a получится ноль.

$a:0=?$ – **на ноль делить нельзя.**

Упражнения

17. Прочитайте слова и выражения:

действие – действия;
арифметическое действие – арифметические действия;
сложение; действие сложения;
сумма – это результат сложения;
вычитание; действие вычитания;
разность – это результат вычитания;
умножение; действие умножения;
произведение – это результат умножения;
деление; действие деления;
частное – это результат деления;
называть; называться; называется;
как называется это действие?
это действие называется сложение;
как называются эти числа;
эти числа называются слагаемые;
нельзя; число нельзя разделить на ноль;
выполнить – выполните, выполните действия.

18. Прочитайте:

$7+2=9$. Какое это действие? Как называются числа 7, 2 и 9? Что такое сумма?

19. Прочитайте:

$20-19=1$. Какое это действие? Как называются числа 20, 19 и 1? Что такое разность?

20. Прочитайте:

$17\cdot 3=51$. Какое это действие? Как называются числа 17, 3 и 51? Что такое произведение?

21. Прочитайте:

$65:5=13$. Какое это действие? Как называются числа 65, 5 и 13? Что такое частное?

22. Выполните сложение. Прочитайте:

а) $326+154$;
б) $12\ 481+3\ 564$;
в) $1\ 251+149$;
г) $142\ 367+1\ 012$.

23. Выполните вычитание. Прочитайте:

а) $49-27$;
б) $3\ 567-2\ 348$;
в) $119-12$;
г) $10\ 001-1\ 987$.

24. Выполните умножение. Прочитайте:

а) $24 \cdot 17$; б) $241 \cdot 12$;
в) $356 \cdot 3$; г) $1\,027 \cdot 110$.

25. Выполните деление. Прочитайте:

а) $364:4$; б) $1125:75$;
в) $256:16$; г) $6\,054:3\,027$.

26. Ответьте на вопросы:

а) Какие математические действия Вы знаете?
б) Что такое сумма? Назовите компоненты сложения.
в) Что такое разность? Назовите компоненты вычитания.
г) Что такое произведение? Назовите компоненты умножения.
д) Что такое частное? Назовите компоненты деления.

3.2 Порядок действий

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Порядок действий	Order of operations	Ordre d´opérations
Вычислить	To calculate	Calculer
Вычислите	Calculate	Calculez
Если	If	Si
Если …, то …	If …, then …	Si …, alors
Равен, м. р.; равна, ж. р., равно, с. р.; (числу)	Equal (to …)	Egal (au nombre …)
Следовательно	Therefore	Par conséquent, donc
Правило	Rule	Régle
Запись	Entry, a record	Inscription, un disque (opération)
Содержать	To contain	Contenir
Только	Only	Seulement
Последовательно	Step by step; orderly	Conséquemment ; successivement
Различные действия	Different operations	Différentes opérations
Раскрывать (скобки) – раскрыть (скобки)	To open (the brackets)	Ouvrir (des parenthéses)

Пример 1. Вычислите: $18-6+4$.

Первое действие – вычитание: $18-6=12$. Разность равна двенадцати.

Второе действие – сложение: $12+4=16$. Сумма равна шестнадцати. Следовательно, $18-6+4=16$.

Правило

Если запись содержит только действия сложения и вычитания, то вычисляем последовательно слева направо.

Пример 2. Вычислите: $36:9\cdot 4$.

Первое действие – деление. $36:9=4$. Тридцать шесть разделить на девять получится четыре.

Второе действие – умножение. $4\cdot 4=16$. Четыре умножить на четыре получится шестнадцать. Следовательно, $36:9\cdot 4=16$.

Правило

Если запись содержит только действия умножения и деления, то вычисляем последовательно слева направо.

Пример 3. Вычислите: $24+18:3-5\cdot 4$.

Первое действие – деление. $18:3=6$. Восемнадцать разделить на три получится шесть.

Второе действие – умножение. $5\cdot 4=20$. Пять умножить на четыре получится двадцать.

Третье действие – сложение. $24+6=30$. Двадцать четыре плюс шесть получится тридцать.

Четвертое действие – вычитание. $30-20=10$. Тридцать минус двадцать получится десять. Следовательно, $24+18:3-5\cdot 4=10$.

Правило

Если запись содержит различные действия, то сначала выполняем действия умножения и деления последовательно, потом – действия сложения и вычитания тоже последовательно.

Пример 4. Вычислите: $\left\{\left[2\cdot\left(148-72:4\right)\right]+55\right\}:9$. Эта запись содержит различные действия и различные скобки.

Сначала раскрываем круглые скобки: $148-72:4$. Первое действие – деление: $72:4=18$. Второе действие – вычитание: $148-18=130$. Следовательно, результат в круглых скобках равен числу 130.

Потом раскрываем квадратные скобки: $2\cdot 130=260$. Следовательно, результат в квадратных скобках равен числу 260.

Потом раскрываем фигурные скобки: $260+55=315$. Результат в фигурных скобках равен числу 315.

Потом делим: $315:9=35$.

Следовательно, $\left\{\left[2\cdot\left(148-72:4\right)\right]+55\right\}:9=35$.

Правило

Если запись содержит скобки (круглые, квадратные, фигурные), то выполняем действия в скобках по степени их вложения, т. е. от самых внутренних до внешних.

ЗАПОМНИТЕ!

$7+6:2=10$	*Вопрос:* Чему равен результат? *Ответ:* Результат равен десяти или результат равен числу десять	Результат равен… – мужской род
$3+2=5$	*Вопрос:* Чему равна сумма? *Ответ:* Сумма равна пяти или сумма равна числу пять	Сумма равна … – женский род
$4\cdot 3=12$	*Вопрос:* Чему равно произведение? *Ответ:* Произведение равно двенадцати или произведение равно числу двенадцать	Произведение равно … – средний род
$15:3=5$	*Вопрос:* Чему равно частное? *Ответ:* Частное равно пяти или частное равно числу пять	Частное равно … – средний род

Упражнения

27. Назовите порядок действий:

а) $a-b:c+d$; б) $a-\left\{b+\left[c:(m-n)\cdot(d+k)\right]\cdot x\right\}$;

в) $k+\left[c-(m+n)\cdot x\right]\cdot d$; г) $x-y+d\cdot(m+n):a$.

28. Ответьте:

а) чему равен результат: $38:2+21$?
б) чему равна сумма чисел: $8+4$?
в) чему равно произведение чисел: $15\cdot 4$?
г) чему равно частное от деления чисел: $55:11$?

29. Вычислите:

а) $72-12+2-6+9$; б) $36\cdot 6:3:3\cdot 7$;
в) $248-24\cdot 12:2+36$; г) $13\cdot 2+36:9$.

30. Вычислите:

а) $675\ 019+88\ 892:284-98\ 603$; б) $308\ 803-75\ 152:176+79\ 008$;

в) $709\cdot 9-2\ 480\ 065:413$; г) $4\ 789\ 368:228-24\cdot 606\ 789\ 368$.

31. Вычислите:

а) $(5\ 555+82\ 320:84-693)\cdot 66$; б) $612\ 228+(53\ 007-52\ 275:615)$;

в) $32\,087-87\cdot(67+62\,524:308)$;   г) $343\cdot(324\,378:54-4\,862)+777$;
д) $51\,003-(4\,968+709\cdot 52)+203$;   е) $18\,408:(268\cdot 75-19\,746)+959$;
ж) $467\,915+137\,865:(31\,353-48\cdot 609)$;
з) $(86\cdot 217+275\,116):859+279\,569$.

32. Вычислите:

а) $112\,840:\{5\cdot[(5\,893+9\,018):37]\cdot(424-396)\}$;

б) $2\,690+[4888:(3\,006\cdot 702-2\,110\,024)-16]$.

3.3 Свойства арифметических действий

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Свойство	Property	Propriété
Закон	Law	Loi
Коммутативный закон	Commutative law	Droit commutatif
Ассоциативный закон	Associative law	Droit associatif
Например	For example	Par exemple
Верен, м. р.; верна, ж. р.; верно, с. р.; верны, мн. ч.	Correct	Juste; exact
Любой	Any	Importe quel
Способ	Method	Moyen
Решение	Solution	Solution
Решать – решить	To solve	Résoudre
Использовать	To use	Utiliser

Свойства сложения

1. $a+b=b+a$ – коммутативный закон.

Например: $3+5=5+3$.

2. $a+b+c=a+(b+c)=(a+b)+c$ – ассоциативный закон.

Например: $35+154+20=35+(15+20)=70$.

Свойства вычитания

1. Вычитание суммы из числа: $a-(b+c)=a-b-c$.

Например: $25-(5+13)=25-5-13=20-13=7$.

2. Вычитание числа из суммы: $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c)$.

Например:
$(36+27)-16=(36-16)+27=47$; $(36+27)-16=36+(27-16)==47$.

3. Сложение с разностью: $a+(b-c)=a+b-c$.

Например: $6+(44-19)=6+44-19=31$.

4. Вычитание разности: $a-(b-c)=a-b+c$.

Например: $65-(35-18)=65-35+18=48$.

Свойства умножения

1. $a\cdot b=b\cdot a$ – коммутативный закон.

Например: $5\cdot 6=6\cdot 5=30$.

2. $a\cdot b\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ – ассоциативный закон.

Например: $12\cdot 8\cdot 4=12\cdot(8\cdot 4)=(12\cdot 8)\cdot 4=384$.

3. $(a+b+c)\cdot d=a\cdot d+b\cdot d+c\cdot d$ – дистрибутивный закон.

Например: $(30+45+120)\cdot 12=30\cdot 12+45\cdot 12+120\cdot 12=360+540+1\,440=$
$=2\,340$.

Свойства деления

1. Деление суммы или разности на число: $\frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}$.

Например: $\frac{48+36}{4}=\frac{48}{4}+\frac{36}{4}=12+9=21$; $\frac{51-39}{3}=\frac{51}{3}-\frac{39}{3}=17-13=4$.

2. Деление произведения на число: $\frac{a\cdot b}{c}=\frac{a}{c}\cdot b=a\cdot\frac{b}{c}$. Это свойство верно для любого числа множителей:

$$\frac{a\cdot b\cdot c}{d}=\frac{a}{d}\cdot b\cdot c=a\cdot b\cdot\frac{c}{d}=\frac{b}{d}\cdot a\cdot c.$$

Например: $\frac{48\cdot 21}{8}=\frac{48}{8}\cdot 21=6\cdot 21=126$;

$\frac{7\cdot 21\cdot 2}{3}=\frac{21}{3}\cdot 7\cdot 2=7\cdot 14=98$.

3. Умножение числа на частное: $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}$.

Например: $2\cdot(135:5)=\frac{2\cdot 135}{5}=\frac{270}{5}=54$.

4. Деление числа на частное: $a:(b:c)=(a:b):c$.

Например: $\frac{360}{180:6}=\frac{360}{180}\cdot 6=12$.

5. Деление частного на число: $(a:b):c=a:(b\cdot c)$ *или* $(a:b):c=(a:c):b$.

Например: $(1\,200:15):40$.

1-й способ решения: $(1\,200:15):40=80:40=2$.

2-й способ решения: $(1\,200:15):40=1\,200:(15\cdot 40)=1\,200:600=2$.

3-й способ решения: $(1\,200:15):40=(1\,200:400):15=30:15=2$.

ЗАПОМНИТЕ!

Результат верен	Мужской род
Сумма верна	Женский род
Свойство верно	Средний род
Действия верны	Множественное число

Упражнения

33. Прочитайте слова и выражения:

свойство – свойства;
свойства сложения; свойства вычитания;
закон – законы;
коммутативный закон;
ассоциативный закон;
дистрибутивный закон;
любое число – любые числа;
способ – способы;
использовать, используйте;
решать, решить, решите;
решение, верное решение, решение верно.

34. Назовите законы сложения и умножения.

35. Используйте коммутативный и ассоциативный законы сложения и решите:

а) $87+39+56+13+61$;   б) $458+42+33+67$;
в) $11+12+13+17+18+19$;   г) $635+208+292+365$.

36. Используйте свойства арифметических действий и решите:

а) $28+37+59+43+32$;   б) $(54\,271+39\,999)\cdot 1\,000$;
в) $(654+289)-254$;   г) $(227+358)-(127+258)$;
д) $(348-299)+252$;   е) $(657+298)-(257+198)$;
ж) $25\cdot 86\cdot 4$;   з) $69\cdot 27+31\cdot 27$;
и) $348\cdot 90-238\cdot 90$;   к) $977\cdot 49+49\cdot 23$;
л) $46\cdot 95\,820:20$;   м) $(30-2)\cdot 5$;
н) $7\cdot(60-2)$;   о) $45\cdot 49+45\cdot 51$;
п) $510\,173-39\cdot(8\,892:39+10)$;   р) $(40+2)\cdot 50+35\cdot 5:7$;
с) $91\cdot 14+9\cdot 14=$;   т) $(40-16)\cdot 5$;
у) $8\cdot(80-2)$;   ф) $61\cdot 37+63\cdot 61$;
х) $480\,159-49\cdot(10\,159:49+20)$;   ц) $(50+2)\cdot 40+36\cdot 5:9$.

ЗАНЯТИЕ 4

4.1 Делитель и кратное

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Кратное число	Multiple number	Multipled´un nombre
Точный, -ая, -ое, -ые	Accurate; exact	Exact
Точное частное	Exact quotient	Quotient exact
Остаток	Remainder	Reste
Это значит …	It means	Ca signifier
Найти	To find	Trouver
Соотношения	Ration; relation; correlation	Correlation; proportion
Который, -ая, -ое,-ые	Which	Qui
Сколько	How many	Combine

Частное двух натуральных чисел бывает **точное** и **неточное**.

$$\begin{array}{r|l} -30 & 5 \\ \underline{30} & 6 \text{ – частное} \\ 0 & \text{– остаток} \end{array}$$

6 – это точное частное, т. к. $6 \cdot 5 = 30$

$$\begin{array}{r|l} -25 & 6 \\ \underline{24} & 4 \text{ – частное} \\ 1 & \text{– остаток} \end{array}$$

4 – это неточное частное, т. к. $4 \cdot 6 \neq 25$, но $4 \cdot 6 + 1 = 25$. Тут 1 – это остаток.

Разделить число *a* (делимое) **на число *b*** (делитель) – это значит найти два числа q (частное) и r (остаток), при которых имеют место соотношения:

$$a = b \cdot q + r,\ 0 \leq r \leq b,\ b \neq 0.$$

Если $r = 0$ (остаток равен нулю), то число b – это делитель числа a; число a – кратное числа b.

Делитель числа a – это число, на которое a делится без остатка.

Кратное числа a – это число, которое делится на a без остатка.

Пример 1. $10 : 2 = 5$; 2 – это делитель числа 10; 10 – это кратное числа 2.

Пример 2. $12 : 6 = 2$;6 – это делитель числа 12; 12 – это кратное числа 6.

Упражнения

38. Прочитайте слова и выражения:

делитель – делители;
кратное – кратные;
точный, точная, точное;
остаток – остатки;
значит, это значит;
найти, найдите;

который, которая, которое, которые;
число, которое делится;
число, на которое делится.

38. Верно ли, что:

а) 5 – делитель 45; б) 16 – делитель 8;
в) 27 – кратное 3; г) 6 – кратное 12?

39. Из чисел 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 назовите:

а) делители 20; б) делители 16;
в) кратные 4; г) кратные 3.

40. Напишите все делители числа:

а) 12; б) 19; в) 27; г) 36.

41. Напишите все двузначные числа, кратные числу:

а) 8; б) 11.

42. Ответьте на вопросы:

а) Что называют делителем числа a?
б) Что называют кратным числа a?
в) Что значит разделить число a на число b?

4.2 Признаки делимости чисел

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Делимость чисел	Divisibility of numbers	Divisibilité de nombres
Признаки (делимости чисел)	Criterions (of divisibility of numbers)	Caractéres (de divisibilité de nombres)
Делиться	To be divisible	Divisible
Последний, -яя, -ее, -ие	Last	Dernier
Сказать	To say	Dire
Потому что	Because	Parce que; puisque
Все	All	Tous

Число делится на 2, если его последняя цифра делится на 2.

Например, числа 12, 50, 348, 576, 4 294, 30 590 делятся на 2, потому что их последние цифры делятся на 2.

Число делится на 5, если его последняя цифра делится на 5.

Например, числа 15, 80, 375, 1 005 делятся на 5, потому что их последние цифры пять и ноль делятся на 5.

Число делится на 3, если сумма его цифр делится на 3.

Например, числа 156, 222, 378, 1 032, 15 189 делятся на три. Число 156 делится на 3, потому что $1+5+6=12$, а 12 делится на 3. Число 15 189 делится на 3, потому что $1+5+1+8+9=24$, а 24 делится на 3.

Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

Например, числа 153, 252, 819, 3 150, 5 787 делятся на 9. Число 153 делится на 9, потому что $1+5+3=9$, а 9 делится на 9. Число 819 делится на 9, потому что $8+1+9=18$, а 18 делится на 9.

Число делится на 4, если две его последние цифры делятся на четыре или две его последние цифры – нули.

Например, числа 112, 600, 724, 1 084, 3 084 делятся на 4. Число 724 делится на 4, потому что две его последние цифры – число 24, а число 24 делится на 4. Число 600 делится на 4, потому что две его последние цифры – нули.

Число делится на 25, если две его последние цифры делятся на 25 или две его последние цифры – нули.

Например, числа 250, 400, 975, 1 050, 5 125 делятся на 25. Число 975 делится на 25, потому что две последние его цифры – число 75, а 75 делится на 25. Число 400 делится на 25, потому что две его последние цифры – нули.

Число делится на 8, если три его последние цифры делятся на 8 или три его последние цифры – нули.

Например, числа 1 008, 3 032, 5 120, 9 000 делятся на 8. Число 1 008 делится на 8, потому что три его последние цифры – 008, а 8 делится на 8. Число 9 000 делится на 8, потому что три его последние цифры – нули.

Число делится на 125, если три его последние цифры делятся на 125 или три его последние цифры – нули.

Например, числа 1 375, 10 125, 51 000 делятся на 125. Число 1 375 делится на 125, потому что три его последние цифры – 375, а 375 делится на 125. Число 51 000 делится на 125, потому что три его последние цифры – нули.

Число делится на 6, если оно делится на 2 и на 3.

Например, числа 126, 348, 750, 1 068, 3 163, 17 844 делятся на 6. Число 750 делится на 6, потому что его последняя цифра 0 делится на 2, а сумма его цифр $7+5=12$ делится на 3. Число 17 844 делится на 6, потому что его последняя цифра 4 делится на 2, а сумма его цифр $1+7+8+4+4=24$ делится на 3.

Упражнения

43. Прочитайте слова и выражения:

делимость чисел – признаки делимости чисел;
последний, последняя, последнее, последние;
последняя цифра – последние цифры;
разделить, делится;

число делится, числа делятся;
число делится …, если;
число делится …, потому что;
сказать – скажите.

44. Скажите, какие числа делятся:

а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 5; д) на 6; е) на 8; ж) на 9; з) на 25; и) на 125?

45. Назовите три числа, которые:

а) делятся на 2;
б) делятся на 3;
в) делятся на 4;
г) делятся на 5;
д) делятся на 8;
е) делятся на 9;
ж) делятся на 25;
з) делятся на 125.

46. Прочитайте сначала числа, которые делятся на 2, потом числа, которые делятся на 6:

378, 3 008, 255, 1 024, 3 120, 741, 5 170, 6 300, 258, 7 875, 12 048, 555.

47. Напишите все двузначные числа, кратные 25.

48. Напишите трехзначные числа, кратные 125.

49. Ответьте на вопросы:

а) Какие числа делятся на 2?
б) Какие числа делятся на 4?
в) Какие числа делятся на 3?
г) Какие числа делятся на 8?
д) Какие числа делятся на 9?
е) Какие числа делятся на 25, 125?
ж) Какие числа делятся на 5, 10?
з) Какие числа делятся на 6?

ЗАНЯТИЕ 5

5.1 Разложение чисел на простые множители

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Разложить	Expand	Décomposer
Простое число	Prime number	Nombre premier
Простой множитель	Prime factor	Facteur premier
Само на себя	By itself	Par lui-méme
Составное число	Composite number	Nombre compose
Всегда	Always	Toujours
Записывать – записать	To write down	Ecrire; noter
Общий	Common	Commun

Простые числа – это натуральные числа, которые имеют только два делителя. **Простое число** – это натуральное число, которое делится только на единицу и само на себя.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 197, 199,… – это двести первых простых числа. Например, число 23 – это простое число, потому что 23 делится только на 1 и на 23. Следовательно, число 23 имеет только два делителя: 1 и 23.

Составное число – это натуральное число, которое имеет больше двух делителей. Например, число 36 делится на 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Следовательно, число 36 имеет девять делителей.

1 (единица) – не простое и не составное число.

Разложить число на простые множители – это значит записать его как произведение простых чисел.

Разложим число 18 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array} \qquad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Простые числа 2, 3, 3 – это простые множители числа 18.

Разложим число 153 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad 153 = 3 \cdot 3 \cdot 17$$

Простые числа 3, 3, 17 – это простые множители числа 153.

Упражнения

50. Прочитайте слова и выражения:

разложение, разложить, разложим;
разложить на множители;
простое число – простые числа;
делиться, делится;
число делится, делится само на себя;
составное число – составные числа;
всегда – не всегда;
запись, записывать, записать.

51. Назовите простые однозначные числа. Назовите однозначные составные числа.

52. Прочитайте сначала простые, а потом составные числа:

5, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 19, 21, 23, 25, 29, 31, 36, 42, 45, 47, 49, 51, 62. 77, 83, 90, 91, 95, 97, 101, 109.

53. Назовите все простые числа от 11 до 37. Назовите все составные числа от 10 до 30.

54. Назовите делители чисел: 24, 30, 42. Назовите наибольший делитель чисел: 24, 30, 42. Назовите общие делители чисел: 24, 30, 42.

55. Разложите на простые множители числа:

27, 36, 46, 72, 84, 100, 243, 368, 420, 1 000.

56.Ответьте на вопросы:

а) Что такое простое число?
б) Приведите примеры простых чисел.
в) Что такое составное число?
г) Приведите примеры составных чисел.
д) Число 1 простое или составное число?
е) Что значит разложить число на простые множители?

5.2 Наибольший общий делитель (НОД)

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Наибольший общий делитель (НОД)	The highest common factor (HCF)	Le plus grand commun diviseur (PGCD)
Наименьшее общее кратное (НОК)	Least common multiple (LCM)	Le plus petit commun multiple (PPCM)
Несколько	Several; some	Quelques; plusieurs
Данный, -ая, -ое, -ые	Given	Donné
Каждый, -ая, -ое, -ые	Every; each	Chaque
Формула	Formula	Formule

Общий делитель нескольких чисел – это число, на которое все данные числа делятся без остатка.

Например, число 25 делитель на 1, 5, 25; число 35 делится на 1, 5, 7, 35. Общие делители чисел 25 и 35 – это 1 и 5.

Число 42 делится на 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.

Число 105 делится на 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105. Числа 42 и 105 имеют общие делители: 1, 3, 7, 21.

Наибольший общий делитель (НОД) нескольких чисел – это наибольшее число среди всех общих делителей данных чисел.

Число 5 – наибольший общий делитель (НОД) чисел 25 и 35. Число 21 – наибольший общий делитель (НОД) чисел 42 и 105. Мы пишем так:

$\text{НОД}(25,35)=5$; $\text{НОД}(42,105)=21$.

Как найти наибольший общий делитель (НОД) чисел?

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найдем НОД чисел 18 и 24. Разложим числа 18 и 24 на простые множители:

$$\left.\begin{array}{l}18=2\cdot 3\cdot 3\\24=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\end{array}\right\}\ \text{2 и 3 – общие множители.}$$

$\text{НОД}(18,24)=2\cdot 3=6$.

Пример 2. Найдем НОД чисел 45, 60, 75. Разложим числа 45, 60, 75 на простые множители:

$$\left.\begin{array}{l}45=3\cdot 3\cdot 5\\60=2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\\75=3\cdot 5\cdot 5\end{array}\right\}\ \text{3 и 5 – общие множители.}\ \text{НОД}(45,60,75)=3\cdot 5=15.$$

Итак, **чтобы найти НОД нескольких чисел**, надо разложить эти числа на простые множители и записать произведение из общих простых множителей.

5.3 Наименьшее общее кратное (НОК)

Наименьшее общее кратное (НОК) нескольких чисел – это наименьшее число, которое делится на каждое из данных чисел без остатка.

Например: на число 6 делятся числа: 6, 12, 18, 24, 30 и т. д. На число 8 делятся числа: 8, 16, 24, 32, 40 и т. д. Число 24 – наименьшее общее кратное (НОК) чисел 6 и 8. Оно делится на 6 и 8. Мы пишем так: $\text{НОК}(6,8)=24$.

Как найти наименьшее общее кратное чисел?

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найдем НОК чисел 72 и 108. Разложим числа 72 и 108 на простые множители:

$$\left.\begin{array}{l}72=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\\108=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\end{array}\right\}\ 2^3,3^3\ \text{– все множители в наибольшей степени.}$$

$\text{НОК}(72,108)=2^3\cdot 3^3=216$.

Пример 2. Найдем НОК чисел 360 и 70.

Используем формулу: $\text{НОК}(a,b)=\dfrac{a\cdot b}{\text{НОД}(a,b)}$.

$\text{НОД}(360,70)=10$, $\text{НОК}(360,70)=\dfrac{360\cdot 70}{10}=2\ 520$.

Пример 3. Найдем НОК чисел 20 и 27. Разложим числа на простые множители: $20=2\cdot 2\cdot 5$; $27=3\cdot 3\cdot 3$. Числа 20 и 27 не имеют общих множителей. $\text{НОК}(20,27)=2\cdot 2\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot 3=540$.

Итак, **чтобы найти НОК нескольких чисел**, надо разложить эти числа на простые множители и записать произведение из всех простых множителей, взяв их в наибольшей степени.

НОК чисел, которые не имеют общих множителей (взаимно простых), есть произведение этих чисел.

Упражнения

57. Прочитайте слова и выражения:

общий делитель – общие делители;
наибольшее число – наибольший общий делитель;
данное число – данные числа;
общий множитель – общие множители;
наименьшее число, наименьшее общее кратное;
несколько чисел – нескольких чисел;
каждое число, каждое из чисел;
рассмотреть, рассмотрим (примеры);
использовать, используем;
формула – формулы.

58. Выполните следующее:

а) разложите на простые множители числа 48 и 64;
б) назовите все делители числа 48;
в) назовите все делители числа 64;
г) назовите общие делители чисел 48 и 64;
д) назовите НОД чисел 48 и 64.

59. Назовите:

а) все двузначные числа, кратные 10;
б) все двузначные числа, кратные 15.
в) НОК чисел 10 и 15.

60. Найдите НОД чисел:

а) 18, 36 и 72; б) 35, 28 и 56; в) 156 и 66; г) 112, 152 и 48.

61. Найдите НОК чисел:

а) 14 и 49; б) 12,18 и 36; в) 16, 64 и 96; г) 39 и 27.

62. Ответьте на вопросы:

а) Что такое общий делитель нескольких чисел? Приведите пример.
б) Что такое НОД? Приведите пример.
в) Как найти НОД нескольких чисел? Приведите пример.
г) Что такое НОК? Приведите пример.
д) Как найти НОК нескольких чисел? Приведите пример.
е) Какие числа являются взаимно простыми? Приведите пример.
ж) Как найти НОК взаимно простых чисел? Приведите пример.
з) Являются ли числа 5 и 15 взаимно простыми?
и) Являются ли числа 5 и 13 взаимно простыми?

ЗАНЯТИЕ 6

6.1 Обыкновенные дроби

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Дробь	Fraction	Fraction
Обыкновенная дробь	Common fraction	Fraction ordinaire
Часть (единицы)	Part (of unit)	Partie (de l´unité)
Числитель	Numerator	Numérateur
Знаменатель	Denominator	Dénominateur
Правильная дробь	Proper fraction	Fraction réguliére
Смешанное число	Mixed number	Nombre mixte
Дробная часть	Fractional part	Partie fractionnaire
Обратить, обращать	To convert	Convertir

Мы уже знаем целые числа. 5, 13, 27 – это целые числа. Разделим единицу на равные части.

Одна часть единицы или несколько частей единицы – это **дробь** (рис. 6.1).

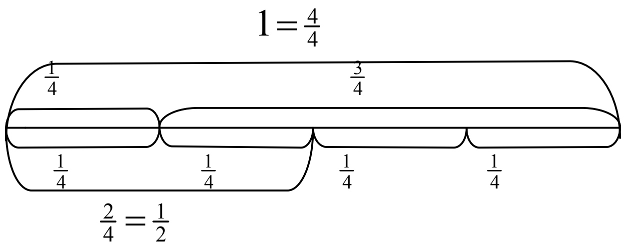


Рисунок 6.1 – Деление единицы на части

$\frac{1}{4}$ – это обыкновенная дробь.

$\frac{1}{2};\frac{3}{4};\frac{4}{4}$ – это тоже обыкновенные дроби.

Обыкновенная дробь это запись вида

$$\frac{a}{b},\ (b\neq 0),$$

где a – **числитель**, b – **знаменатель**.

$\frac{3}{4}$ – это обыкновенная дробь (три четвёртых), 3 – числитель, 4 – знаменатель.

Читаем дроби так:

$\frac{1}{2}$ – одна втор**ая**; $\frac{1}{3}$ – одна треть**я**; $\frac{1}{4}$ – одна четвёрт**ая**; $\frac{1}{5}$ – одна пят**ая**; $\frac{1}{6}$ – одна шест**ая**; $\frac{1}{10}$ – одна десят**ая**; $\frac{1}{12}$ – одна двенадцат**ая**; $\frac{1}{35}$ – одна тридцать пят**ая**; $\frac{1}{40}$ – одна сорок**овая**; $\frac{21}{50}$ – двадцать одна пятидесят**ая**; $\frac{31}{60}$ – тридцать одна шестидесят**ая**; $\frac{71}{100}$ – семьдесят одна сот**ая**.

Итак, если числитель дроби $a = 1; 21; 31; 41; ...$, (исключение $a = 11$), то знаменатель дроби b читаем с окончанием **-ая**.

$\frac{2}{3}$ – две треть**их**; $\frac{3}{4}$ – три четвёрт**ых**; $\frac{3}{5}$ – три пят**ых**; $\frac{7}{8}$ – семь восьм**ых**; $\frac{13}{21}$ – тринадцать двадцать перв**ых**; $\frac{15}{26}$ – пятнадцать двадцать шест**ых**; $\frac{17}{40}$ – семнадцать сорок**овых**; $\frac{20}{50}$ – двадцать пятидесят**ых**; $\frac{33}{74}$ – тридцать три семьдесят четвёрт**ых**; $\frac{47}{93}$ – сорок семь девяносто треть**их**; $\frac{59}{100}$ – пятьдесят девять сот**ых**; $\frac{3}{200}$ – три двухсот**ых**; $\frac{11}{600}$ – одиннадцать шестисот**ых**; $\frac{233}{1\,000}$ – двести тридцать три тысячн**ых**.

Итак, если числитель дроби $a \neq 1; 21; 31; 41; ...$ (исключение $a \neq 11$), то знаменатель дроби b читаем с окончанием **-ых**.

Если $a < b$ (числитель меньше, чем знаменатель), то дробь **правильная.** Правильная дробь меньше единицы.

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{7}{9}, \frac{3}{10}, \frac{12}{17}$ – это правильные дроби, т. к. $\frac{1}{2} < 1$, $\frac{2}{3} < 1$ и т.д.

Если $a \geq b$ (числитель больше, чем знаменатель или числитель равен знаменателю), то дробь **неправильная.**

$\frac{2}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{11}{10}, \frac{19}{8}, \frac{21}{12}, \frac{51}{20}, \frac{71}{71}$ – это неправильные дроби.

Дробь равна единице, если числитель равен знаменателю. Пример: $\frac{2}{2} = 1$; $\frac{7}{7} = 1$; $\frac{71}{71} = 1$.

Дробь больше, чем 1 (единица), если числитель больше знаменателя. Пример: $\frac{4}{3} > 1$; $\frac{19}{18} > 1$.

Эту дробь можно записать как смешанное число (смешанная дробь): $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, $\frac{19}{8} = 2\frac{3}{8}$.

Смешанное число имеет целую часть и дробную часть (дробь). **Смешанное число** – это сумма целой и дробной части: $1\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$.

Смешанные числа читаем так:

$1\frac{1}{2}$ – одна цел**ая** одна втор**ая**; $1\frac{7}{12}$ – одна цел**ая** семь двенадцат**ых**; $1\frac{21}{40}$ – одна цел**ая** двадцать одна сороков**ая**; $2\frac{2}{3}$ – две цел**ых** две треть**их**; $3\frac{1}{5}$ – три цел**ых** одна пят**ая**; $6\frac{6}{10}$ – шесть цел**ых** шесть десят**ых**; $21\frac{5}{17}$ – двадцать одна цел**ая** пять семнадцат**ых**; $100\frac{51}{70}$ – сто цел**ых** пятьдесят одна семидесят**ая**.

Как обратить неправильную дробь в смешанное число?

Рассмотрим примеры:

1) обратим $\frac{20}{3}$ в смешанное число:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} -\underline{18} & 6 \text{ – частное} \\ 2 \text{ – остаток} & \end{array}$$

$\frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$;

2) обратим $\frac{166}{9}$ в смешанное число:

$$\begin{array}{r|l} 166 & 9 \\ \cline{2-2} -\underline{9} & 18 \text{ – частное} \\ -76 & \\ \underline{72} & \\ 4 \text{ – остаток} & \end{array}$$

$\frac{166}{9} = 18\frac{4}{9}$;

3) обратим $\frac{15}{4}$ в смешанное число: $\frac{15}{4} = \frac{12+3}{4} = \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4} = 3\frac{3}{4}$.

Итак, **чтобы обратить неправильную дробь в смешанное число**, надо числитель разделить на знаменатель, частное записать в целую часть, остаток записать в числитель, а знаменатель оставить прежним.

Как обратить смешанное число в неправильную дробь?

Рассмотрим примеры:

1) обратим $4\frac{1}{2}$ в неправильную дробь: $4\frac{1}{2}=\frac{4\cdot2+1}{2}=\frac{9}{2}$;

2) обратим $10\frac{11}{17}$ в неправильную дробь: $10\frac{11}{17}=\frac{10\cdot17+11}{11}=\frac{181}{17}$;

3) обратим $1\frac{16}{43}$ в неправильную дробь: $1\frac{16}{43}=\frac{1\cdot43+16}{43}=\frac{59}{43}$.

Итак, **чтобы обратить смешанное число в неправильную дробь**, надо целую часть умножить на знаменатель и прибавить к числителю, полученную сумму записать в числитель неправильной дроби, а знаменатель оставить прежним.

ЗАПОМНИТЕ!

Записать число **как** неправильную дробь	Запишем число **как** неправильную дробь
Записать неправильную дробь **как** смешанное число	Запишем неправильную дробь **как** смешанное число
Обратить смешанное число **в** неправильную дробь	Обратить смешанное число **в** неправильную дробь
Обратить неправильную дробь **в** смешанное число	Обратим неправильную дробь **в** смешанное число

Упражнения

63. Прочитайте слова и выражения:

разделить; разделим; разделим единицу;
часть – части;
равно, равный, равные части;
одна часть, несколько частей;
дробь – дроби;
обыкновенная дробь – обыкновенные дроби;
числитель – числители;
знаменатель – знаменатели;
правильный, правильная, правильное, неправильные;
неправильная дробь – неправильные дроби;
числитель меньше, чем знаменатель;
числитель равен знаменателю;
числитель больше, чем знаменатель;
смешанное число – смешанные числа;
обратить, обращать, обратим;
обратим смешанное число в неправильную дробь;
обратим неправильную дробь в смешанное число;
запись, записывать, записать;
записать смешанное число как неправильную дробь;

записать неправильную дробь как смешанное число.

64. Прочитайте и напишите на русском языке дроби:

а) $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{9}{14}, \frac{7}{13}, \frac{38}{56}, \frac{3}{86}, \frac{181}{205}, \frac{19}{137};$

б) $\frac{12}{7}, \frac{21}{5}, \frac{127}{15}, \frac{121}{21}, \frac{321}{18}, \frac{120}{43}, \frac{137}{96}, \frac{180}{40}.$

65. Прочитайте и напишите на русском языке смешанные числа:

$1\frac{5}{17}, 3\frac{2}{3}, 15\frac{11}{13}, 10\frac{12}{19}, 33\frac{8}{9}, 221\frac{5}{11}, 21\frac{5}{17}, 205\frac{1}{30}, 161\frac{41}{100}.$

66. Напишите цифрами:

семь двенадцатых, четыре целых три седьмых, две пятых, одна целая восемнадцать двадцать третьих, двадцать четыре четвертых, девятнадцать двенадцатых, три целых одна сотая, тринадцать целых одна восьмая, тридцать целых девять сороковых.

67. Обратите неправильные дроби в смешанные числа:

а) $\frac{12}{7}, \frac{21}{5}, \frac{127}{15}, \frac{321}{18}, \frac{120}{43}, \frac{137}{96}, \frac{180}{40};$

б) $\frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{11}{10}, \frac{19}{8}, \frac{21}{12}, \frac{51}{20}, \frac{44}{3}, \frac{75}{51}, \frac{1\,001}{10}, \frac{196}{87}, \frac{2\,105}{127}, \frac{5\,184}{201}.$

68. Обратите смешанные числа в неправильные дроби:

$1\frac{5}{17}, 3\frac{2}{3}, 15\frac{11}{13}, 10\frac{12}{19}, 33\frac{8}{9}, 221\frac{5}{11}, 21\frac{6}{17}, 205\frac{1}{30}, 161\frac{41}{100}.$

69. Ответьте на вопросы:

а) Что такое обыкновенная дробь?

б) Чему равен числитель дроби $\frac{134}{179}$? Чему равен знаменатель дроби $\frac{134}{179}$?

в) Какие виды обыкновенных дробей Вы знаете?

г) Какая дробь называется правильной? Приведите примеры.

д) Какая дробь называется неправильной? Приведите примеры.

е) Что такое смешанное число? Приведите примеры.

ж) Как обратить неправильную дробь в смешанное число? Приведите пример.

з) Как обратить смешанное число в неправильную дробь? Приведите пример.

6.2 Основное свойство дроби

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Основной , -ая, -ое, -ые	Basic	Fondamental
Величина	Value	Valeur
Измениться	To change	Changer
Одинаковые	Identical	Identiques
Сокращать, сократить	To cancel; to simplify	Simplifier

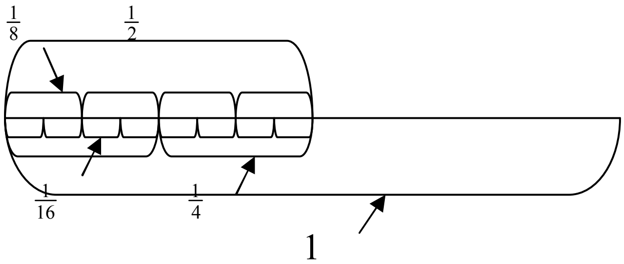


Рисунок 6.2 – Основное свойство дроби

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16};\ \frac{1}{2}=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{2}{4};\ \frac{2}{4}=\frac{2\cdot 4}{4\cdot 4}=\frac{8}{16};\ \frac{8}{16}=\frac{8:2}{16:2}=\frac{4}{8};\ \frac{4}{8}=\frac{4:4}{8:4}=\frac{1}{2}.$$

Величина дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить или разделить на одинаковое число, не равное нулю (рис. 6.2):

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{a:m}{b:m}, b\neq 0, m\neq 0 .$$

Обыкновенные дроби можно сокращать. **Сократить дробь**, значит разделить числитель и знаменатель на одинаковое число.

Например: $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$ мы сократили дробь $\frac{8}{16}$ на 8;

$\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$ мы сократили дробь $\frac{5}{100}$ на 5;

$\frac{34}{51}=\frac{2}{3}$ мы сократили дробь $\frac{34}{51}$ на 17;

$\frac{42}{105}=\frac{2}{5}$ мы сократили дробь $\frac{42}{105}$ на 21.

Упражнения

70. Прочитайте слова и выражения

основной, основная, основное, основные;
свойство – свойства; основное свойство;
величина, величина дроби;

измениться, изменится, не изменится;
величина не изменится;
одинаковые, одинаковые числа;
равно; равно нулю; число, не равное нулю;
сократить, сокращать;
можно сократить (дробь);
мы сократим, мы сократили.

71. Скажите, на сколько можно сократить дроби:

$$\frac{4}{6},\ \frac{3}{12},\ \frac{14}{21},\ \frac{13}{39},\ \frac{18}{24},\ \frac{26}{52},\ \frac{34}{68},\ \frac{25}{100},\ \frac{336}{474},\ \frac{1\,008}{5\,000}.$$

72. Сократите дроби:

а) $\frac{4}{14},\ \frac{6}{16},\ \frac{9}{21},\ \frac{15}{63},\ \frac{36}{84},\ \frac{10}{35},\ \frac{6}{24},\ \frac{12}{30};$

б) $\frac{14}{35},\ \frac{120}{288},\ \frac{37}{333},\ \frac{83}{249},\ \frac{84}{108},\ \frac{264}{312},\ \frac{275}{325};$

в) $\frac{34\cdot 12\cdot 15}{51\cdot 45\cdot 64};\ \frac{28\cdot 21\cdot 16}{64\cdot 49\cdot 22\cdot 15};\ \frac{45\cdot 20\cdot 5\cdot 3}{27\cdot 8\cdot 25}.$

73. Ответьте на вопросы:

а) Сформулируйте основное свойство дроби.
б) Что значит сократить дробь? Приведите примеры.

ЗАНЯТИЕ 7

7.1 Действия с обыкновенными дробями

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Складывать, сложить	To add	Additioner
Дополнительный, -ая, -ое, -ые	Complementary	Complémentaire
Разный, -ая, -ое, -ые	Different	Différents
Вычитать, вычесть	To subtract	Soustraire
НОЗ (наименьший общий знаменатель)	LCD (lowest com-mon denominator)	PPD (plus petit déno-minateur commun)
Дополнительный множитель	Additional factor	Facteur supplémentaire
Чтобы …, нужно …)	In order to (…)	Pour (…)

Сложение (вычитание)

Если дроби имеют **одинаковые знаменатели**, нужно сложить (вычесть) их числители и написать их общий знаменатель:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

Рассмотрим примеры:

1) $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$;

2) $\frac{4}{9} + \frac{8}{9} = \frac{4+8}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$;

3) $\frac{9}{10} - \frac{3}{10} = \frac{9-3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Если дроби имеют **разные знаменатели**, нужно привести их к НОЗ и сложить (вычесть):

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\text{НОК}(b,d) : b \cdot a + \text{НОК}(b,d) : d \cdot c}{\text{НОК}(b,d)}.$$

Чтобы привести дроби к НОЗ, нужно числитель и знаменатель дроби умножить на дополнительный множитель.

Наименьший общий знаменатель (НОЗ) – это НОК знаменателей дробей.

Дополнительный множитель – это частное от деления НОЗ на знаменатель дроби.

Рассмотрим примеры:

1) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{10+9}{15} = \frac{19}{15} = 1\frac{4}{5}$. 15 – это наименьший общий знаменатель (НОЗ), 5 – это дополнительный множитель, 3 – это тоже дополнительный множитель;

2) $\frac{7}{12} - \frac{5}{18} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{21}{36} - \frac{10}{36} = \frac{21-10}{36} = \frac{11}{36}$.

Чтобы сложить (вычесть) смешанные числа, нужно сложить (вычесть) их целые и дробные части.

ЗАПОМНИТЕ!

ЧТОБЫ + инфинитив …, НУЖНО + инфинитив … . *Чтобы сложить* смешанные числа, *нужно сложить* их целые части и дроби.

Рассмотрим примеры:

1) $1\frac{2}{5} + 3\frac{1}{5} = 4\frac{2+1}{5} = 4\frac{3}{5}$;

2) $7\frac{1}{6} + 2\frac{8}{9} = 7\frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 3} + 2\frac{8 \cdot 2}{9 \cdot 2} = 7\frac{3}{18} + 2\frac{16}{18} = 9\frac{3+16}{18} = 9\frac{19}{18} = 10\frac{1}{18}$;

3) $7\frac{5}{7}-2\frac{1}{2}=5\frac{10-7}{14}=5\frac{3}{14}$;

4) $4-1\frac{2}{3}=3\frac{3}{3}-1\frac{2}{3}=2\frac{3-2}{3}=2\frac{1}{3}$;

5) $8\frac{1}{4}-5\frac{7}{12}=8\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}-5\frac{7}{12}=3\frac{3-7}{12}=2\frac{12+3-7}{12}=2\frac{8}{12}=2\frac{2}{3}$.

Умножение

Чтобы умножить обыкновенные дроби, нужно числитель первой дроби умножить на числитель второй дроби, знаменатель первой дроби умножить на знаменатель второй дроби и, если можно, сократить. Чтобы умножить смешанное число (или целое число) на дробь, нужно записать смешанное число (или целое число) как неправильную дробь и умножить эти дроби.

Рассмотрим примеры:

1) $\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{15}=\frac{3\cdot 14}{7\cdot 15}=\frac{2}{5}$;

2) $4\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4\cdot 1}{1\cdot 2}=2$;

3) $2\frac{2}{5}\cdot 3\frac{3}{4}=\frac{12}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{12\cdot 15}{5\cdot 4}=9$.

Деление

Чтобы разделить обыкновенную дробь на обыкновенную дробь, нужно числитель первой дроби умножить на знаменатель второй дроби и результат записать в числитель; знаменатель первой дроби умножить на числитель второй дроби и этот результат записать в знаменатель, затем, если можно, сократить.

Чтобы разделить смешанные числа (или целое число на дробь), нужно записать смешанные числа (или целое число) как неправильные дроби и разделить.

Рассмотрим примеры:

1) $\frac{3}{5}:\frac{9}{10}=\frac{3\cdot 10}{5\cdot 9}=\frac{2}{3}$;

2) $\frac{3}{8}:5=\frac{3}{8}:\frac{5}{1}=\frac{3\cdot 1}{8\cdot 5}=\frac{3}{40}$;

3) $\frac{12}{35}:\frac{8}{15}=\frac{12\cdot 15}{35\cdot 8}=\frac{9}{14}$;

4) $7\frac{1}{3}:1\frac{2}{9}=\frac{22}{3}:\frac{11}{9}=\frac{22\cdot 9}{3\cdot 11}=6$.

Упражнения

74. Прочитайте слова и выражения:

общий знаменатель, наименьший общий знаменатель;
дополнительный множитель – дополнительные множители;
одинаковый, одинаковые знаменатели;
разный, разные знаменатели;

если …, то …;если дроби имеют …, то нужно …;
сложение, сложить, мы сложим;
вычитание, вычесть, мы вычтем;
записать целое число как неправильную дробь;
записать смешанное число как неправильную дробь.

75. Выполните сложение и вычитание:

а) $25-8\frac{3}{4}-\left(13\frac{5}{12}+2\frac{11}{18}\right)$;   б) $\left(65\frac{2}{3}+3\frac{1}{8}\right)-\left(13-10\frac{5}{9}\right)$;

в) $\left(20\frac{4}{7}-19\frac{3}{4}\right)+\left(17-16\frac{4}{7}\right)$;   г) $11\frac{7}{36}+3\frac{3}{4}-\left(14-8\frac{4}{5}\right)$;

д) $\left(3\frac{1}{2}-2\frac{3}{5}\right)+\left(70-68\frac{19}{24}\right)$;   е) $\left(12-4\frac{1}{2}\right)+\left(9\frac{1}{6}-8\frac{1}{3}\right)$;

ж) $\left(20\frac{1}{2}-1\frac{1}{8}\right)-\left(19\frac{1}{3}-\frac{7}{24}\right)$;   з) $18\frac{1}{4}+17\frac{5}{6}+\left(24-23\frac{13}{24}\right)$.

76. Выполните действия:

а) $6\frac{1}{4}\cdot 1\frac{2}{5}\cdot 5\frac{3}{4}:\frac{9}{31}:\frac{5}{36}$;   б) $\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{7}:\frac{2}{15}\cdot 12\frac{1}{4}:7\frac{1}{2}$;

в) $4\frac{1}{12}\cdot 8\frac{6}{7}\cdot 7\frac{2}{3}:\frac{7}{36}\cdot 7$;   г) $\frac{14}{99}\cdot 1\frac{29}{55}:\frac{4}{15}\cdot\frac{11}{20}:5\frac{1}{2}$;

д) $5\frac{5}{7}:2\frac{2}{5}\cdot 5\frac{1}{4}:1\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}$;   е) $15:\frac{5}{18}:3\frac{3}{8}:\frac{4}{27}\cdot 4\frac{1}{5}$.

77. Выполните действия:

а) $2:\frac{1}{4}+\left[\left(1\frac{1}{2}+2\frac{2}{3}\right):3\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right]:8\frac{8}{9}$;   б) $5\frac{1}{6}:31+\left(3\frac{3}{4}+2\frac{1}{6}\right):2\frac{3}{5}-\frac{2}{3}:\frac{4}{9}$;

в) $4:2\frac{1}{2}+\left[1\frac{1}{10}+7:\left(3\frac{1}{12}-1\frac{5}{8}\right)\right]:\frac{59}{60}$;   г) $2\frac{2}{3}:2+\left(14\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\right):22\frac{3}{5}:3\frac{1}{3}$;

е) $\left(4\frac{5}{12}-3\frac{13}{24}\right):1\frac{3}{4}+\left(3\frac{1}{18}-2\frac{7}{12}\right):\frac{17}{27}$; ж) $2\frac{2}{25}\cdot 2+5\frac{7}{25}\cdot 3$;

з) $1\frac{5}{28}\cdot\left[7\frac{5}{7}:3\frac{3}{5}-\left(\frac{53}{56}-\frac{29}{35}\right):\frac{33}{40}\right]$;   и) $\left(7\frac{5}{7}:3\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right):1\frac{1}{3}$;

к) $10\frac{2}{21}+\left(7\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{3}-12\frac{1}{4}:\frac{7}{9}\right):6+3\frac{1}{8}$;   л) $3\frac{1}{4}\cdot\left(14\frac{4}{5}+\frac{4}{15}\right)-47:5\frac{9}{10}$;

м) $\left(\frac{40}{63}-\frac{8}{21}\right):2+1\frac{9}{16}:\frac{5}{8}+2\frac{3}{8}:\frac{3}{4}$;   н) $5\frac{1}{3}:6\frac{2}{3}+\left(12:3\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}+8\frac{1}{5}$;

о) $\left(25\frac{11}{37}+17\frac{9}{37}-1\frac{18}{37}\right)\cdot 9$; п) $\left(\frac{2}{15}+1\frac{7}{12}\right)\cdot\frac{30}{103}-2:2\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{32}$.

78. Ответьте на вопросы:

а) Как сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями? Напишите формулу.

б) Как сложить (вычесть) дроби с разными знаменателями? Напишите формулу.

в) Как найти НОЗ нескольких дробей?

г) Как сложить (вычесть) смешанные числа?

д) Как умножить две обыкновенные дроби? Напишите формулу.

е) Как умножить два смешанных числа?

ж) Как разделить две обыкновенные дроби? Напишите формулу.

з) Как разделить два смешанных числа?

ЗАНЯТИЕ 8

8.1 Десятичные дроби

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Десятичная дробь	Decimalfraction	Fraction décimale
Десятичный знак	Decimal place	Signe décimal
Вправо	To the right	Á droit
Влево	To the left	Á gauche
Запятая	Decimal point; comma	Virgule
Переносить, перенести	To transport	Déplacer
Столько …, сколько	As many …, as	Autant de …, que

Дроби, знаменатели которых равны 10, 100, 1 000, …, называют **десятичными дробями**. Десятичная дробь состоит из целой и дробной частей, которые разделены запятой. Целую часть записывают слева от запятой, дробную – справа. Количество цифр после запятой равно количеству нулей, стоящих в знаменателе исходной обыкновенной дроби.

$\frac{1}{10}=0{,}1$ – ноль целых одна десятая;

$\frac{1}{100}=0{,}01$ – ноль целых одна сотая;

$\frac{1}{1\,000}=0{,}001$ – ноль целых одна тысячная;

$\dfrac{1}{10\,000}=0{,}0\,001$ – ноль целых одна десятитысячная;

$\dfrac{1}{100\,000}=0{,}00\,001$ – ноль целых одна стотысячная;

$\dfrac{1}{1\,000\,000}=0{,}000\,001$ – ноль целых одна миллионная и т. д.

Например, $\dfrac{3}{10}=0{,}3$; $\dfrac{7}{100}=0{,}07$; $\dfrac{67}{1\,000}=0{,}067$; $5\dfrac{312}{10\,000}=5{,}0\,312$ – это десятичные дроби.

Десятичные дроби читаются так:

0,1 – ноль цел**ых** одна десят**ая**; 0,3 – ноль цел**ых** три десят**ых**; 0,7 – ноль цел**ых** семь десят**ых**; 0,51 – ноль цел**ых** пятьдесят одна сот**ая**;0,95 – ноль цел**ых** девяносто пять сот**ых**; 0,011 – ноль цел**ых** одиннадцать тысячн**ых**; 0,125 – ноль цел**ых** сто двадцать пять тысячн**ых**; 0,0 001 – ноль цел**ых** одна десятитысячн**ая**; 1,12 – одна цел**ая** двенадцать сот**ых**; 2,3 – две цел**ых** три десят**ых**; 21,31 – двадцать одна цел**ая** тридцать одна сот**ая**; 100,091 – сто цел**ых** девяносто одна тысячн**ая**; 385,456 – триста восемьдесят пять цел**ых** четыреста пятьдесят шесть тысячн**ых**.

Десятичная дробь имеет целую часть и дробную часть. Десятичная дробь – это сумма целой части и дробной части. Например: 3,81 = 3 + 0,81. Десятые, сотые, тысячные – это десятичные знаки. Величина дроби не изменится, если справа (или слева) написать один или несколько нулей. Например: 2,5 = 2,50 = 2,500 = 2,5 000 = …; 2,5 = 02,5 = 002,5 = 0 002,5 = … .

8.2 Действия с десятичными дробями

Сложение и вычитание

Чтобы сложить (или вычесть) десятичные дроби, нужно написать равное число десятичных знаков у дробей и сложить (или вычесть) как целые числа. Запятая должна быть под запятой.

Рассмотрим примеры:

а) $8{,}2+3{,}6=11{,}8$

или $\begin{array}{r} +\,8{,}2 \\ 3{,}6 \\ \hline 11{,}8 \end{array}$

б) $7{,}14+1{,}4=7{,}14+1{,}40=8{,}54$

или $\begin{array}{r} +\,7{,}14 \\ 1{,}40 \\ \hline 8{,}54 \end{array}$

в) $4{,}5-3{,}2=1{,}3$

или $\begin{array}{r} -\,4{,}5 \\ 3{,}2 \\ \hline 1{,}3 \end{array}$

г) $5{,}001-3{,}2=5{,}001-3{,}200=1{,}801$

или $\begin{array}{r} -\,5{,}001 \\ 3{,}200 \\ \hline 1{,}801 \end{array}$

Умножение

Чтобы умножить десятичную дробь на десятичную дробь (или на целое число), нужно умножить их как целые числа и в произведении отделить справа запятой столько десятичных знаков, сколько десятичных знаков имеют сомножители вместе.

Рассмотрим примеры:

а) $3{,}4 \cdot 2 = 6{,}8$ или

$$\begin{array}{r} \times\, 3{,}4 \\ 2 \\ \hline 6{,}8 \end{array}$$

б) $32{,}35 \cdot 0{,}2 = 6{,}47$ или

$$\begin{array}{r} \times\, 32{,}35 \\ 0{,}2 \\ \hline 6{,}470 \end{array}$$

Деление

Рассмотрим примеры:

а) $45 : 1{,}25 = 4\,500 : 125 = 36.$

$$\begin{array}{r|l} -4\,500 & 125 \\ \underline{375} & \overline{36} \\ -750 & \\ \underline{750} & \\ 0 & \end{array}$$

б) $28{,}14 : 21 = 1{,}34;$

$$\begin{array}{r|l} -28{,}14 & 21 \\ \underline{21} & \overline{1{,}34} \\ -7\,1 & \\ \underline{6\,3} & \\ -84 & \\ \underline{84} & \\ 0 & \end{array}$$

в) $11{,}726 : 4{,}51 = 1172{,}6 : 451 = 2{,}6;$

$$\begin{array}{r|l} -1\,172{,}6 & 451 \\ \underline{902} & \overline{2{,}6} \\ -2\,706 & \\ \underline{2\,706} & \\ 0 & \end{array}$$

Чтобы разделить десятичную дробь (или целое число) на десятичную дробь, нужно в делимом и в делителе перенести запятую на столько цифр, сколько десятичных знаков в делителе, затем выполнить деление на целое число и написать запятую после деления целой части десятичной дроби.

Упражнения

79. Прочитайте слова и выражения:

десятичная дробь – десятичные дроби;
целая часть; дробная часть;
десятичный знак – десятичные знаки;
справа; слева (где?);вправо; влево (куда?);
запятая; запятая под запятой;
умножить десятичную дробь на целое число;
отделить – отделять; столько …, сколько …;
столько цифр, сколько десятичных знаков;

переносить – перенести;
перенести запятую (куда?) вправо;
написать (где?) справа.

80. Прочитайте и напишите на русском языке десятичные дроби:

0,3; 0,27; 0,31; 1,25; 3,017; 5,1; 12,032; 17,001; 25,01; 0,375; 4,12; 0,124; 19,0 101.

81. Выполните действия:

а) $\dfrac{1{,}75\cdot 0{,}28+18{,}3:61+14{,}21}{4{,}75-(4{,}75-1{,}5:0{,}5)}$; б) $\dfrac{20-(0{,}75+14{,}3-2{,}45):50}{16{,}5:55+12{,}5\cdot 4-30{,}3}$;

в) $\dfrac{(0{,}45\cdot 10-17{,}5:5):4+0{,}45\cdot 12}{(20{,}5:0{,}25+1:0{,}125):2{,}25}$; г) $\dfrac{0{,}25\cdot 4{,}28:0{,}535\cdot 0{,}4+3{,}2}{38-15\cdot 0{,}6:0{,}25}$.

82. Ответьте на вопросы:

а) Какие дроби называются десятичными? Приведите примеры.
б) Как сложить (вычесть) десятичные дроби? Приведите примеры.
в) Как умножить десятичные дроби? Приведите примеры.
г) Как разделить десятичные дроби? Приведите примеры.

8.3 Как обратить десятичную дробь в обыкновенную

Рассмотрим примеры:

$$0{,}3=\frac{3}{10};\ 0{,}15=\frac{15}{100}=\frac{3}{20};\ 1{,}19=1\frac{19}{100};\ 3{,}075=\frac{3\,075}{1\,000}=3\frac{75}{1\,000}=3\frac{3}{40}.$$

Чтобы обратить десятичную дробь в обыкновенную, нужно числа, которые стоят слева от запятой, записать в целую часть смешанного числа, а числа, которые стоят справа от запятой, записать в числитель обыкновенной дроби, а в знаменателе записать единицу и нули, количество которых равно количеству цифр, стоящих справа от запятой, и, если можно, сократить.

Упражнения

83.Прочитайте слова и выражения:
обратить – обращать; обратите;
обратить десятичную дробь в обыкновенную;
мы обратим десятичную дробь в обыкновенную;
записать десятичную дробь как обыкновенную.

84. Обратите десятичные дроби в обыкновенные:

0,3; 0,21; 0,35; 0,012; 0,705; 0,05; 0,75; 0,375; 0,025; 0,0 032.

85. Обратите десятичные дроби в смешанные числа:

12,35; 18,1; 1,005; 3,125; 71,21; 5,5; 11,008; 2,015; 50,3.

86. Выполните действия:

а) $0{,}1:\frac{1}{20}+\left(2\frac{11}{24}:0{,}75-1\frac{11}{30}\right)\cdot\frac{15}{43}$;   б) $4\frac{1}{3}:13+20:1{,}25+0{,}125\cdot 40$;

в) $\dfrac{\left(\frac{1}{36}+\frac{27}{400}\cdot 3\frac{1}{3}\right)\cdot 5\frac{1}{7}-1{,}75}{6\frac{3}{25}-29{,}136:4\frac{4}{5}}+18\frac{3}{4}\cdot 0{,}4$;   г) $\dfrac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}$;

87. Ответьте на вопрос:

Как обратить десятичную дробь в обыкновенную (в смешанное число)?

8.4 Как обратить обыкновенную дробь в десятичную дробь

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Конечная десятичная дробь	Limited decimal fraction	Fraction decimal limité
Бесконечная десятичная дробь	Infinite decimal fraction	Fraction decimal illimite
Период (дроби)	Period (of fraction)	Période (de fraction)

Рассмотрим примеры:

1) $\frac{1}{2}=1:2=0{,}5$;

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ \hline -10 & 0{,}5 \\ 10 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

2) $\frac{3}{4}=3:4=0{,}75$;

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \hline -30 & 0{,}75 \\ 28 & \\ \hline -20 & \\ 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3) $\frac{1}{6}=1:6=0{,}1666...=0{,}1(6)$;

$$\begin{array}{r|l} 1 & 6 \\ \hline -10 & 0{,}1666\ldots \\ 6 & \\ \hline -40 & \\ 36 & \\ \hline -40 & \\ 36 & \\ \hline -40 & \\ 36 & \\ \hline 4 - \text{остаток} & \end{array}$$

4) $\frac{5}{9}=5:9=0{,}(5)$.

$$\begin{array}{r|l} 5 & 9 \\ \hline -50 & 0{,}555\ldots \\ 45 & \\ \hline -50 & \\ 45 & \\ \hline -50 & \\ 45 & \\ \hline 5 - \text{остаток} & \end{array}$$

В 1) и 2) 0,5; 0,75 – **конечные десятичные** дроби.

В 3) 0,1 666…=0,1(6) – **бесконечная периодическая** дробь, 6 – период дроби.

В 4) 0,555…=0,(5) – тоже бесконечная периодическая дробь, 5 – период дроби.

Периодические дроби читаем так:

0,1(6) – ноль целых, одна десятая и шесть *в периоде;*
1,(5) – одна целая, пять *в периоде;*
0,(54) – ноль целых, пятьдесят четыре *в периоде;*
2,05(23) – две целых, пять сотых и двадцать три *в периоде.*

Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, нужно числитель разделить на знаменатель.

Если знаменатель содержит только множители 2 и 5, то получится конечная десятичная дробь.

Если знаменатель содержит другие множители (не только 2 и 5), получится бесконечная периодическая дробь.

Упражнения

88. Прочитайте слова и выражения:

обратить – обращать;
обратить обыкновенную дробь в десятичную;
конечная десятичная дробь – конечные десятичные дроби;
бесконечный, бесконечная, бесконечное, бесконечные;
бесконечная десятичная дробь – бесконечные десятичные дроби;
период; периодическая дробь;
бесконечная периодическая дробь – бесконечные периодические дроби;
содержать; содержит;
знаменатель содержит множители.

89. Прочитайте и напишите на русском языке периодические дроби:

0,(7); 0,(6); 0,(27); 0,8(3); 0,41(6); 1,(063); 9,33(83); 3,2(64); 2,22(21).

90. Обратите обыкновенные дроби в десятичные. Результаты напишите на русском языке:

$\frac{2}{5};\ \frac{1}{8};\ \frac{4}{25};\ 1\frac{10}{11};\ 3\frac{8}{9};\ \frac{5}{7};\ 1\frac{2}{3};\ 4\frac{9}{16}.$

91. Выполните действия:

а) $33\frac{3}{4}\cdot 1{,}1+11{,}571:5{,}7+0{,}845;$

б) $512{,}9:2\frac{1}{2}+\left(108{,}4\cdot 6\frac{3}{5}-255{,}84:78\right):1{,}25+25{,}112;$

в) $24{,}57:3{,}5+\left(3{,}35-\frac{5}{8}\right)+225:12{,}5+2\frac{1}{4}:0{,}2;$

г) $12{,}6:2{,}5+1{,}3\cdot 4\frac{3}{4}+1{,}25:0{,}2$.

92. Решите примеры:

а) $(17\frac{11}{25}+7{,}13):3{,}5+(4\frac{5}{7}+5{,}8)\cdot\frac{7}{46}$;

б) $\left[\left(20{,}2-76{,}84:8\frac{1}{2}\right)+4{,}72-8{,}4:1\frac{7}{18}\right]:7{,}9$;

в) $\left[10\frac{13}{20}-54{,}74:6\frac{4}{5}+\left(8\frac{2}{15}-3\frac{7}{15}\cdot 2\frac{1}{13}\right)\right]\cdot 3{,}75$;

г) $\left(12{,}06+4{,}5\cdot 3\frac{2}{3}\right):\left(11{,}15-3{,}75\cdot 2\frac{3}{5}\right)+142{,}1:3\frac{1}{2}$;

д) $\dfrac{\left(\frac{13}{84}\cdot 1{,}4-2{,}5\cdot\frac{7}{180}\right):2\frac{7}{18}+4\frac{1}{2}\cdot 0{,}1}{70{,}5-528:7\frac{1}{2}}$;

е) $\dfrac{2\frac{3}{4}:1{,}1+3\frac{1}{3}}{2{,}5-0{,}4\cdot 3\frac{1}{3}}:\frac{5}{7}-\dfrac{\left(2\frac{1}{6}+4{,}5\right)\cdot 0{,}375}{2{,}75-1\frac{1}{2}}$;

ж) $10\frac{1}{3}-\dfrac{5\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{14}+15{,}03:1\frac{1}{2}-5{,}02+7{,}8:2\frac{2}{5}}{0{,}08\cdot 4\frac{1}{4}+2\frac{2}{7}\cdot 2{,}8-4\frac{6}{25}}$;

з) $\left(\dfrac{3\frac{1}{3}+2{,}5}{2{,}5-1\frac{1}{3}}\cdot\dfrac{4{,}6-2\frac{1}{3}}{4{,}6+2\frac{1}{3}}\cdot 5{,}2\right):\left(\dfrac{0{,}05}{\frac{1}{7}-0{,}125}+5{,}7\right)$;

и) $\dfrac{12-3\frac{3}{7}\cdot 2{,}8}{3\frac{11}{20}+101{,}22:8\frac{2}{5}}+\dfrac{22-159{,}9:7\frac{4}{5}}{2{,}13+2{,}05\cdot 1\frac{2}{5}}$;

к) $\left\{\left[18\frac{1}{6}-\left(3{,}06:7\frac{1}{2}+3\frac{2}{5}\cdot 0{,}38\right)\right]:\left(19-2{,}375\cdot 5\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\right\}\cdot 0{,}625$;

л) $17{,}81:0{,}137+\left[\dfrac{\left(6-4\frac{1}{2}\right):0{,}3}{\left(3\frac{1}{20}-2{,}65\right):4:\frac{1}{5}}-\dfrac{\left(0{,}3-\frac{3}{50}\right)\cdot 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{8}}\right]:4\frac{19}{28}$.

93. Ответьте на вопросы:

а) Как обратить обыкновенную дробь в десятичную?
б) Как обратить десятичную дробь в обыкновенную?
в) 0,8 – это конечная или бесконечная периодическая десятичная дробь?
г) 0,8(3) – это конечная или бесконечная периодическая десятичная дробь?

ЗАНЯТИЕ 9

9.1 Отношения

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Отношение	Ratio	Rapport
Часть от числа	Part of a number	Partie d´un nombre
Составлять, составить	To constitute	Constituer

Отношение – это частное от деления числа A на число B, не равное нулю, т. е. $\frac{A}{B} = k; B \neq 0$.

Читаем так:

$\frac{A}{B} = k$ – отношение числа A к числу B равно k;

$\frac{4}{2} = 2$ – отношение четырёх к двум равно двум.

Отношение показывает, во сколько раз одно число больше, чем другое, или какую часть одно число составляет от другого числа.

Чтобы найти отношение двух чисел, нужно разделить одно число на другое.

Например:

1) во сколько раз число 10 больше, чем число 2?

$\frac{10}{2} = 5.$ Число 10 больше, чем число 2 в 5 раз;

2) какую часть составляет число 2 от числа 10?

$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$ Число 2 составляет одну пятую часть от числа 10.

3) во сколько раз число 200 больше, чем число 4?

$\frac{200}{4} = 50.$ Число 200 больше, чем число 4 в 50 раз;

4) какую часть составляет число 4 от числа 200?

$\frac{4}{200} = \frac{1}{50}.$ Число 4 составляет одну пятидесятую часть от числа 200.

Упражнения

94. Прочитайте слова и выражения:

отношение – отношения;
частное; частное от деления чисел;
во сколько раз одно число больше, чем другое число?
какую часть одно число составляет от другого числа?

95. Ответьте на вопросы:

а) Во сколько раз 16 больше, чем 4; 21 больше, чем 7; 36 больше, чем 9?
б) Какую часть составляет число 18 от числа 36?
в) Какую часть составляет число 7 от числа 35?

96. Прочитайте отношения: $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{8}{2} = 4$.

97. Ответьте на вопросы:

а) Что такое отношение?
б) Как найти отношение двух чисел?
в) Что показывает отношение двух чисел?

9.2 Пропорции

Словарь новых слов

Русский	**Английский**	**Французский**
Пропорция	Proportion	Proportion
Равенство	Equality	Égalité
Относится (число *a* относится к числу *b*)	Relate (number a refers to number b)	Se rapporter á (nombre a fait référence au nombre b)
Член	Term	Terme
Крайний член пропорции	Extreme term of a proportion	Terme extréme d´une proportion
Средний член пропорции	Mean term of a proportion	Terme moyen d´une proportion
Левая часть пропорции	Left part of a proportion	Partie gauche d´une proportion
Правая часть пропорции	Right part of a proportion	Partie droite d´une proportion
Неизвестный член пропорции	Unknown of a proportion	Terme inconnu d´une proportion
Известный член пропорции	Known of a proportion	Terme connu d´une proportion

Пропорция – это равенство двух отношений:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\ a:b=c:d;\ b\neq 0,\ d\neq 0.$$

Читаем пропорции так: $\frac{8}{2}=\frac{12}{3}$ – восемь относится к двум, как двенадцать относится к трем; $\frac{6}{24}=\frac{8}{32}$ – шесть относится к двадцати четырем, как восемь относится к тридцати двум.

$a:b=c:d$ – *a* относится к *b,* как *c* относится к *d.*

a и *d* – это крайние члены пропорции.

b и *c* – это средние члены пропорции.

Пропорция имеет две части: левую часть и правую часть.

$$\underbrace{a:b}_{\text{левая}}=\underbrace{c:d}_{\text{правая}}$$

части пропорции

Умножим левую и правую части пропорции на произведение $b\cdot d$:

$$\frac{a}{b}\cdot b\cdot d=\frac{c}{d}\cdot b\cdot d.$$

Получим: $a\cdot d=c\cdot b;\ b\neq 0,\ d\neq 0.$

Основное свойство пропорции

$$a\cdot d=c\cdot b;\ b\neq 0,\ d\neq 0.$$

Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции.

Примеры:

1) $8:2=12:3$, 8 и 2 – это крайние члены пропорции, 2 и 12 – средние члены пропорции. $8\cdot 3=2\cdot 12$, $24=24$.

2) $\frac{3}{5}=\frac{9}{15}$, 3 и 15 – крайние члены пропорции, 5 и 9 – средние члены пропорции. $3\cdot 15=5\cdot 9$, $45=45$.

Как найти неизвестный член пропорции?

Рассмотрим пропорцию: $x:b=c:d$, x – неизвестный крайний член пропорции, d – известный крайний член пропорции, b и c – известные средние члены пропорции:

$$x=\frac{b\cdot c}{d}.$$

Чтобы найти неизвестный крайний член пропорции, нужно произведение средних членов пропорции разделить на известный крайний член.

Примеры:

1) $x:6=15:5;\ x=\frac{6\cdot 15}{5}=18;\ x=18;$

2) $2:3=10:x$; $x=\frac{3\cdot 10}{2}=15$; $x=1$;

3) $\frac{7}{11}=\frac{21}{x}$; $x=\frac{11\cdot 21}{7}=33$; $x=33$.

Рассмотрим пропорцию: $a:x=c:d$, x – неизвестный средний член пропорции, c – известный средний член пропорции, a и d – известные крайние члены пропорции:

$$x=\frac{a\cdot d}{c}.$$

Чтобы найти неизвестный средний член пропорции, нужно произведение крайних членов пропорции разделить на известный средний член.

Примеры:

1) $10:x=5:3$; $x=\frac{10\cdot 3}{5}=6$; $x=6$;   2) $4:8=x:18$; $x=\frac{4\cdot 18}{8}=9$; $x=9$;

3) $\frac{3}{x}=\frac{9}{15}$; $x=\frac{3\cdot 15}{9}=5$; $x=5$.

Упражнения

98.Прочитайте слова и выражения:

пропорция – пропорции;
равенство; верное равенство; равенство двух отношений;
член пропорции – члены пропорции;
средний член пропорции – средние члены пропорции;
крайний член пропорции – крайние члены пропорции;
часть – части;
левая часть; правая часть;
свойство – свойства; основное свойство пропорции;
неизвестный, неизвестная, неизвестное, неизвестные;
известный, известная, известное, известные;
неизвестный член пропорции – известный член пропорции;
неизвестная величина – известная величина;
неизвестное число – известное число;
неизвестные члены – известные члены.

99. Прочитайте пропорции:

а) $3:5=6:10$;   б) $18:9=10:5$;

в) $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$;   г) $\frac{6}{11}=\frac{18}{33}$;

д) $2{,}4:0{,}6=5{,}6:1{,}4$;   е) $\frac{4{,}2}{6}=\frac{2{,}1}{3}$.

100. Найдите неизвестный член пропорции:

а) $x:9=7:14$;

б) $75:9=x:9$;

в) $21:x=36:12$;

г) $24:x=18:5$;

д) $\frac{x}{15}=\frac{8}{24}$;

е) $\frac{16}{17}=\frac{48}{x}$;

ж) $x:\frac{1}{2}=\frac{3}{4}:\frac{7}{8}$;

з) $4,2:0,7=24:x$;

и) $x:0,12=0,3:18$;

к) $3\frac{1}{2}:0,4=x:1\frac{1}{7}$;

л) $\frac{5}{6}:x=\frac{1}{3}:\frac{2}{9}$;

м) $\frac{1,2}{0,6}=\frac{4,6}{x}$;

н) $3,5:\frac{1}{2}=x:\frac{5}{7}$;

о) $\frac{3}{5}:x=1\frac{4}{5}:2\frac{1}{2}$.

101. Найдите x в каждой пропорции:

а) $\frac{1}{6}:2\frac{1}{3}=3\frac{1}{4}x:1,3$;

б) $4,5:3x=4:28$;

в) $1\frac{1}{2}x:\frac{3}{4}=2\frac{1}{2}:0,12$;

г) $1,25:0,4=1,35:0,5x$;

д) $\dfrac{1,2:0,375-0,2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0,8}=\dfrac{0,016:0,12+0,7}{x}$;

е) $\dfrac{0,125x}{\left(\frac{19}{24}-\frac{21}{40}\right)\cdot 8\frac{7}{16}}=\dfrac{\left(1\frac{28}{63}-\frac{17}{21}\right)\cdot 0,7}{0,675\cdot 2,4-0,02}$.

102. Ответьте на вопросы:

а) Что такое пропорция? Приведите примеры.

б) Как называются члены пропорции? Приведите примеры.

в) Сформулируйте основное свойство пропорции?

г) Как найти неизвестный крайний член пропорции? Приведите примеры.

д) Определите крайние члены пропорции $1,9:x=0,4:15$.

е) Как найти неизвестный средний член пропорции? Приведите примеры.

ж) Определите средние члены пропорции $0,005:x=2,4:9$.

9.3 Проценты

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Процент	Percent	Pour cent
Процентное отношение	Percentage ratio	Rapport en pourcentage
Найдите!	Find!	Trouvez !
Составлять – составить	To constitute	Constituer

Процент это сотая часть числа.

% – это знак процента. 1 % = $\frac{1}{100}$=0,01; $\frac{50}{100}=50\ \%$; $\frac{100}{100}=100\ \%$.

ЗАПОМНИТЕ!

Один процент	31 71 101 процент
Два Три процента Четыре	42 83 процента 204
Пять … процентов двадцать	15 97 процентов 112

Как найти несколько процентов от числа?

Чтобы найти несколько процентов от числа, нужно это число разделить на 100 и умножить на число процентов:

$$P\ \% \text{ от числа } A \text{ равны } \frac{A\cdot P}{100}.$$

Примеры:

1. Найти 6 % от числа 200.

$$200 - 100\ \%$$
$$x - 6\ \%$$
$$x = \frac{200\cdot 6}{100} = 12$$

6 % от числа 200 равны 12.

2. В библиотеке 5 000 книг. 20 % книг – учебники. Сколько учебников в библиотеке?

$$5\,000 - 100\ \%$$
$$x - 20\ \%$$
$$x = \frac{5000\cdot 20}{100} = 1000.$$

Ответ: в библиотеке 1 000 книг – учебники.

Как найти число, если мы знаем чему равны несколько его процентов?

Чтобы найти число по его проценту, нужно это число разделить на число процентов и умножить на 100:

$$\text{если } P\ \% \text{ от числа } A \text{ равны } B, \text{ то } A = \frac{B \cdot 100}{P}.$$

Примеры:

1. Найти число, если 5 % его равны 40.

$$40 - 5\ \%$$
$$x - 100\ \%$$
$$x = \frac{40 \cdot 100}{5} = 800.$$

Если 5 % от числа равны 40, то это число равно 800;

2. В группе 9 студентов – арабы. Арабы составляют 75 % от числа студентов в группе. Сколько студентов в группе?

$$9 - 75\ \%$$
$$x - 100\ \%$$
$$x = \frac{9 \cdot 100}{75} = 12.$$

В группе 12 студентов.

Как найти процентное отношение двух чисел?

Чтобы найти процентное отношение (*P* %) двух чисел *A* и *B*, нужно одно число *A* разделить на другое число *B* и умножить на 100 %:

$$P\ \% = \frac{A}{B} \cdot 100\ \%.$$

Процентное отношение показывает, сколько процентов одно число составляет от другого.

Примеры:

1. Найти процентное отношение чисел 17 и 34:

$$\frac{17}{34} \cdot 100\ \% = 65\ \%.$$

Число 17 составляет 50 % от числа 34.

2. В общежитии 400 студентов. 260 студентов – иностранцы. Сколько процентов составляют иностранцы?

$$\frac{260}{400} \cdot 100\ \% = 65\ \%.$$

Иностранцы составляют 65 % от числа всех студентов в общежитии.

Упражнения

103. Прочитайте слова и выражения:

процент – проценты;
процентное отношение двух чисел;
составлять; составляет;
число *A* составляет *P* %от числа *B*.

104. Найдите:

а) 16 % от 84; б) 25 % от 160; в) 17 % от 300;

г) 140 % от15; д) 35 % от 12,5; е) $4\frac{1}{2}\%$ от 120;

ж) 145 % от 250; з) 102,5 % от 75,4; и) 1,5% от 100.

105. Найдите число, если:

а) 7 % его равны 49; б) 60 % его равны 85;
в) 3,5 % его равны 9; г) 130 % его равны 18;
д) 4,5 % его равны 140; е) 375 % его равны 7,5.

106. Найдите процентное отношение:

а) 3 к 9; б) 12 к 25; в) 14 к 20;

г) 14,5 к 29; д) $\frac{3}{4}$ к $5\frac{2}{3}$; е) 0,25 к $\frac{7}{8}$;

ж) 0,3 к 0,4; з) $3\frac{1}{5}$ к 1,28; и) 1,2 к $\frac{3}{4}$.

107. Решите задачи:

а) Площадь всех стран мира равна 135 млн. км^2. Площадь Украины равна 0,44 % от площади всех стран мира. Определить площадь Украины.

б) Две книги стоят 120 грн. 75 к. Сколько стоит каждая книга, если одна книга стоит на 12 % больше, чем другая книга?

в) В диктанте 150 слов. 6 % слов студент написал неправильно. Сколько слов студент написал неправильно?

108. Ответьте на вопросы:

а) Что такое процент?

б) Как найти несколько процентов от числа?

в) Как найти число, если мы знаем, чему равны несколько его процентов?

г) Как найти процентное отношение двух чисел?

Контрольные вопросы к разделу «Водный курс. Арифметика»

1. Какие математические знаки Вы знаете?
2. Какие математические действия Вы знаете?
3. Напишите на русском языке: $\left(12{,}03+0{,}7\right):\dfrac{13}{24}-7\cdot 1{,}1=$
4. Что такое простое число? Приведите пример.
5. Что такое составное число? Приведите пример.
6. Что такое обыкновенная дробь? Приведите пример.
7. Какие типы обыкновенных дробей Вы знаете? Приведите пример.
8. Что такое правильная дробь? Приведите пример.

9. Что такое неправильная дробь? Приведите пример.
10. Что такое смешанная дробь? Приведите пример.
11. Что такое десятичная дробь? Приведите пример.
12. Что такое пропорция? Приведите пример.
13. Что такое процент? Как он обозначается? Приведите пример.

Модель контрольной работы к разделу «Водный курс. Арифметика»

1. Вычислите: $-4\frac{5}{6}+3\frac{3}{23}\cdot\left(-11\frac{4}{9}-(-3,6):\frac{9}{35}\right)$.

2. Записать неправильную дробь $\frac{37}{11}$, $\frac{201}{100}$, $\frac{3245}{15}$ в виде смешанного числа. Результат написать на русском языке.

3. Записать смешанные числа $3\frac{7}{10}$, $105\frac{3}{100}$, $12\frac{9}{1000}$ в виде десятичной дроби. Результат написать на русском языке.

4. Найти НОК(12, 22, 26) чисел.

5. Что такое неправильная дробь? Приведите пример.

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

ЗАНЯТИЕ 10

10.1 Степень с целым показателем

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Степень	Degree	Degré de
Показатель степени	Exponent	Exposant
Основание степени	Basis of degree	Degré de base
В квадрате	Squared	Au carré
В кубе	Cubed	À cuba
Число *a* в степени *n*	Number *a* to degree *n*	Numéro a degré en
Свойства степеней	Properties of degrees	Propriétés des degrés
Возвести в степень	Raise to a power	Élever au degree

Степенью a^n («a в степени эн») числа a называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ – раз}},$$

где a – **основание** степени, n – **показатель** степени, $a \in R \setminus \{0\}$, $n \in Z$

Читают степени так:

a^0 – «a в нулевой степени»;

a^1 – «a в первой степени»;

a^2 – «a во второй степени» или «a в квадрате»;

a^3 – «a в третьей степени» или «a в кубе»;

a^4 – «a в четвёртой степени»;

a^5 – «a в пятой степени»;

a^6 – «a в шестой степени»;

a^7 – «a в седьмой степени» и т. д.

Основные свойства степени с целым показателем:

пусть $a,\ b \in R \setminus \{0\}$, $m,\ n \in Z$, тогда:

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.
3. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$.
4. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.
5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.
6. Если $a > 0$, то $a^n > 0$.

7. Пусть $a>1$, тогда, если $n>m$, то $a^n>a^m$, и, обратно, если $a^n>a^m$, то $n>m$.

8. Пусть $0<a<1$, тогда, если $n>m$, то $a^n<a^m$, и, обратно, если $a^n<a^m$, то $n>m$.

9. Если $a>0$ и $a\neq 1$, то равенство $a^n=a^m$ имеет место тогда и только тогда, когда $n=m$.

Рассмотрим примеры:

1. Вычислить: $2^5\cdot 2^{-4}\cdot 2^0\cdot 2^2$.

$$2^5\cdot 2^{-4}\cdot 2^0\cdot 2^2=2^{5-4+0+2}=2^3=8.$$

2. Записать дробь $\frac{243}{3}$ в виде степени с основанием три.

$$\frac{243}{3}=\frac{3^5}{3^1}=3^{5-1}=3^4.$$

3. Представьте выражение в виде степени и вычислите его значение

$$\frac{25^4\cdot 125^{10}}{5^{37}}.$$

$$\frac{25^4\cdot 125^{10}}{5^{37}}=\frac{(5^2)^4\cdot(5^3)^{10}}{5^{37}}=\frac{5^{2\cdot 4}\cdot 5^{3\cdot 10}}{5^{37}}=5^{8+30-37}=5^1=5.$$

4. Упростите выражение $\left(-5a^3b^7\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{5}a^2c^6\right)^2$.

$$\left(-5a^3b^7\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{5}a^2c^6\right)^2=-5^3a^{3\cdot 3}b^{7\cdot 3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^2a^{2\cdot 2}b^{6\cdot 2}=-5^{3-2}a^{9+4}b^{21+12}=-5a^{13}b^{33}.$$

5. Вычислите: $0{,}02^{-3}\cdot 10^{-4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}\cdot 0{,}4^4$.

$$\left(\frac{2}{100}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^4=\frac{50^3}{1}\cdot\frac{1}{10^4}\cdot\frac{5^2}{4^2}\cdot\frac{2^4}{5^4}=\frac{5^5\cdot 2^4}{10\cdot 2^4\cdot 5^4}=\frac{1}{2}.$$

Упражнения

109. Прочитайте слова и выражения:

степень – степени;
показатель степени, основание степени;
число *a* в квадрате, число *a* во второй степени;
число *a* в кубе, число *a* в третьей степени;
возвести в степень, возвести число в степень.

110. Прочитайте и запишите на русском языке выражения:

2^2; 5^3; 7^0; $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $0{,}28^4$; $6{,}5^7$; $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{10}{11}\right)^5$; $\left(3\frac{7}{8}\right)^2$.

111. Запишите числовое выражение в виде степени a^n:

а) $\dfrac{0,3^9 \cdot 0,3^{18}}{0,3^{23} \cdot 0,3^4}$;

б) $\left(-1\dfrac{7}{9}\right)^{10} \cdot \left(-1\dfrac{7}{9}\right)^{12} : \left(-1\dfrac{7}{9}\right)^{20}$;

в) $\dfrac{6^{12} \cdot (6^3)^5}{(6^5)^4 \cdot 6^4}$;

г) $\dfrac{10^{17} \cdot (10^2)^3}{(10^3)^4 \cdot 10^9}$;

д) $\left(4 \cdot 2^5\right) : \left(2^3 \cdot \dfrac{1}{16}\right)$;

е) $4^{-6} \cdot 4^4 \cdot \left(2^3 \cdot 2^{-4}\right)^{-1}$;

ж) $\dfrac{2^2 \cdot 4 \cdot \left(2^2\right)^4}{2^2 \cdot 2^5}$;

з) $9 \cdot 3^3 \cdot \dfrac{1}{81} \cdot (1/3)^{-2}$.

112. Вычислите:

а) $\dfrac{3^{16} \cdot 2^{10}}{54^5}$;

б) $\dfrac{7^5 \cdot 5^4}{5^5 \cdot 49^3}$;

в) $2^3 \cdot 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 - 2^{-2} \cdot 4 + \left[(-2)^2 : \dfrac{1}{2}\right] \cdot 8$;

г) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1} - \left(-\dfrac{6}{7}\right)^0 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 : 2$;

д) $25 \cdot (5/2)^{-2} \cdot \left(-2^3\right)^{-1}$;

е) $\left(3^{-2}\right)^{-2} \cdot 3^{-5} \cdot 27$.

113. Возведите в степень:

а) $\left(-\dfrac{1}{4}ab^6\right)^2$;

б) $\left(0,1c^2d^3\right)^{-3}$;

в) $\left((-1)^n \cdot (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot (-1)^n\right)^m$;

г) $\left(-1\dfrac{1}{3}a^4c^{-2}d^{-1}\right)^{-1}$.

114. Ответьте на вопросы:

а) Что такое степень числа? Приведите пример.

б) В выражении 6^{25} назовите основание степени и показатель степени.

в) Назовите основные свойства степени с целым показателем.

10.2 Степень с дробным показателем

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
1	2	3
Дробный показатель	Fractionalindex	Indice fractionnaire
Корень	Root	La racine
Радикал	Radical	Radical
Арифметический корень	Arithmetic root	Racine arithmétique

1	2	3
Показатель корня	Root index	Index racine
Подкоренное выражение	Radical expression	Expression radicale
Корень квадратный	Square root	Racine carrée
Корень кубический	Cubic root	Racine cubique
Извлечь корень	Extract the root	Extraire la racine
Определять	Define	Définir
Определение	Definition	Définition

Степенью a^k числа a **с дробным показателем** $k=\dfrac{m}{n}$ $(n \geq 2)$ называется число, определяемое следующим образом:

$$a^k = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Читаем так: «корень степени n из числа a в степени m».

Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a (обозначается $\sqrt[n]{a}$) называется неотрицательное число b такое, что $b^n = a$, $(n \geq 2)$:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ n \geq 2.$$

Читаем так: «корень n-й степени из числа a» или «корень степени n из числа a».

Читают корни так:

$\sqrt{a}$ – «корень квадратный из числа a» или «корень второй степени из числа a»;

$\sqrt[3]{a}$ – «корень кубический из числа a» или «корень третьей степени из числа a»;

$\sqrt[4]{a}$ – «корень четвёртой степени из числа a»;

$\sqrt[5]{a}$ – «корень пятой степени из числа a»;

$\sqrt[6]{a}$ – «корень шестой степени из числа a»;

$\sqrt[7]{a}$ – «корень седьмой степени из числа a» и т. д.

Например, $\sqrt{10}$ – корень квадратный из десяти (из числа десять); $\sqrt[3]{7}$ – корень кубический из семи (из числа семь); $\sqrt[4]{\dfrac{1}{8}}$ – корень четвёртой степени из одной восьмой (из числа одна восьмая); $\sqrt[5]{0{,}9}$ – корень пятой степени из ноль целых девяти десятых (из числа ноль целых девять десятых); $\sqrt[6]{12{,}01}$ – корень шестой степени из двенадцати целых одной сотой (из числа двенадцать целых одна сотая); $\sqrt[7]{1{,}004}$ – корень седьмой степени из одной целой четырёх тысячных (из числа одна целая четыре тысячных).

Степень с дробным показателем обладает всеми свойствами степени с целым показателем.

Свойства арифметических корней:

пусть $a>0,\ b>0,\ n\geq 2,\ m\geq 2,\ k\geq 2$, тогда:

1. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{a}=\sqrt[n\cdot m]{a^{n+m}}$.

2. $\sqrt[n]{a}:\sqrt[k]{a}=\sqrt[n\cdot k]{a^{k-n}}$.

3. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

4. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

5. $\sqrt[n\cdot k]{a^k}=\sqrt[n]{a}$.

6. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$.

7. $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot k]{a}$.

8. $\sqrt{a^2}=|a|,\ a\in R$.

Пример 1. Вычислить а) $\sqrt{25\cdot 49\cdot 81}$, б) $\sqrt{121\cdot 144\cdot 100}$.

$$\text{а) }\sqrt{25\cdot 49\cdot 81}=\left(5^2\cdot 7^2\cdot 9^2\right)^{1/2}=\left(5\cdot 7\cdot 9\right)^{2/2}=315;$$

$$\text{б) }\sqrt{121\cdot 144\cdot 100}=\left(11^2\cdot 12^2\cdot 10^2\right)^{1/2}=\left(11\cdot 12\cdot 10\right)^{2/2}=11\cdot 12\cdot 10=1\,320.$$

Пример 2. Вычислить $\sqrt[3]{36\cdot 42\cdot 49}$, применяя свойства корней.

$$\sqrt[3]{36\cdot 42\cdot 49}=\sqrt[3]{9\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7^2}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{7^3}=3\cdot 2\cdot 7=42.$$

Пример 3. Извлечь корень из выражения $\sqrt[4]{2\cdot 4\cdot 7\cdot 14\cdot 49}$.

$$\sqrt[4]{2\cdot 4\cdot 7\cdot 14\cdot 49}=\sqrt[4]{2^3\cdot 7\cdot 2\cdot 7\cdot 7^2}=\sqrt[4]{2^4\cdot 7^4}=2\cdot 7=14.$$

Пример 4. Представить в виде степени выражение $\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{9}}\cdot\left(a^{-\frac{7}{10}}\right)^{\frac{5}{21}}$.

$$\left(a^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{9}}\cdot\left(a^{-\frac{7}{10}}\right)^{\frac{5}{21}}=a^{\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{9}}\cdot a^{-\frac{7}{10}\cdot\frac{5}{21}}=a^{\frac{1}{6}}\cdot a^{-\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{6}-\frac{1}{6}}=a^0.$$

Упражнения

115. Прочитайте выражения:

степень с дробным показателем – степени с дробными показателями;
арифметический корень – арифметические корни;
корень из числа; извлечь корень из числа;
корень квадратный; корень второй степени;
извлечь корень квадратный из числа;
корень кубический; корень третьей степени;
извлечь корень кубический из числа.

116. Прочитайте и запишите на русском языке выражения:

$\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{\dfrac{1}{40}}$; $\sqrt[4]{(0{,}05)^3}$; $\sqrt[10]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}$; $\sqrt{1{,}28^4}$; $\sqrt[5]{6{,}5^7}$; $\sqrt[6]{\left(31\dfrac{11}{21}\right)^3}$; $\sqrt[3]{\left(\dfrac{10}{11}\right)^5}$; $\sqrt[7]{\left(3\dfrac{3}{4}\right)^2}$.

117. Замените корень степенью с дробным показателем:

а) $\sqrt{b}$; б) $\sqrt[3]{x^2}$;

в) $\sqrt[6]{2x-3b^3}$; г) $\sqrt[9]{x^2+y^4}$.

118. Вычислите, применяя свойства корней:

а) $\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}$; б) $\sqrt[6]{10000}\cdot\sqrt[6]{100}$;

в) $\sqrt[8]{3^5\cdot 5^2}\cdot\sqrt[8]{3^3\cdot 5^6}$; г) $\sqrt[3]{4^6\cdot 3^9}$;

д) $\sqrt[4]{\dfrac{3^8\cdot 7^4}{5^4\cdot 2^{12}}}$; е) $\dfrac{\sqrt[3]{5^8\cdot 7^{10}}}{\sqrt[3]{5^2\cdot 7^{16}}}$.

119. Найдите значение выражения:

а) $0,2\cdot\sqrt[3]{1000}-\dfrac{3}{5}\sqrt[4]{625}$;

б) $\sqrt[7]{-128}+3\cdot\left(\sqrt[5]{9}\right)^5-4\sqrt[8]{256}$;

в) $4\cdot\left(-\sqrt[8]{6}\right)^8-0,8\sqrt[4]{1000}+\left(\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{270}\right)^3$;

г) $\sqrt[6]{0,000064}+\dfrac{2}{9}\left(-3\sqrt[4]{0,4}\right)^4+\sqrt[6]{0,3^{12}}$.

120. Ответьте на вопросы:

а) Что называют степенью с дробным показателем? Приведите пример.

б) Что такое арифметический корень степени n?

в) В выражении $\sqrt{b}$ назовите показатель корня.

г) В выражении $\sqrt{b}$ назовите подкоренное выражение.

д) Верно ли, что в выражении $\sqrt[3]{8}$ подкоренное выражение равно восьми?

е) Верно ли, что в выражении $\sqrt[3]{8}$ показатель корня равен трём?

ж) Верно ли, что выражение $\sqrt[3]{x^4}$ можно записать в виде $x^{\frac{3}{4}}$?

з) Верно ли, что выражение $\sqrt[3]{x^4}$ можно записать в виде $x^{\frac{4}{3}}$?

и) Верно ли, что в выражении $\sqrt[5]{mn^2}$ подкоренное выражение равно mn? Если нет, то назовите свой вариант ответа.

к) Верно ли, что выражение $\sqrt[5]{mn^2}$ можно записать в виде $\left(mn^2\right)^{\frac{1}{5}}$? Если нет, то назовите свой вариант ответа.

л) Верно ли, что выражение $\sqrt[5]{mn^2}$ можно записать в виде $(mn)^{\frac{5}{2}}$? Если нет, то назовите свой вариант ответа.

ЗАНЯТИЕ 11

11.1 Алгебраические выражения

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Алгебра	Algebra	Algèbre
Алгебраическое выражение	Algebraic expression	Expression algébrique
Одночлен	Monomial	Monomial
Стандартный вид	Standard view	Vue standard
Коэффициент	Coefficient	Coefficient
Подобные одночлены	Similar monomials	Monômes similaires
Приведение подобных (одночленов)	Bringing like (monomials)	Apportant comme (monômes)
Многочлен	Polynomial	Polynôme

Алгебраическим выражением называется выражение, в котором числа и буквы соединены действиями сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения арифметического корня. Например, $\left(5xy\right)\cdot\left(-2x^2yb\right)+9{,}3x-\dfrac{y^3+3}{x-y}\cdot\sqrt[4]{xy}$ – алгебраическое выражение.

Одночлен это алгебраическое выражение, в котором числа и буквы связаны только двумя действиями – умножением и возведением в натуральную степень. Например, 7; a^2; b^3c; $-0{,}9x$; $-y$; $-\dfrac{12}{7}ab^4c^5$ это одночлены.

Говорят, что одночлен задан в **стандартном виде**, если вначале записать произведение всех его числовых множителей, которое называют **коэффициентом одночлена**, а потом произведение буквенных множителей в алфавитном порядке. Например, $0{,}5\cdot\left(-15\right)axca^2=-7{,}5a^3cx$. Числовой множитель $-7{,}5$ является коэффициентом одночлена.

Одночлены называются **подобными**, если, записанные в стандартном виде, они совпадают или различаются только коэффициентами.

Например, одночлены $2x^6\cdot x$; x^7; $7x^2\cdot x^5$; $-5x^7$ подобны.

Чтобы умножить одночлен на одночлен, нужно перемножить их коэффициенты и перемножить степени с одинаковыми основаниями.

Многочлен это сумма нескольких одночленов. Например, $-x^4+2y$.

Одночлены, из которых состоит многочлен, называются его **членами**.

Привести подобные члены многочлена, значит найти сумму коэффициентов подобных одночленов, а их буквенную часть записать без изменения. Например,

$$4x-5a+5x-8a-3c=(4+5)\cdot x+(-5-8)\cdot a-3c=9x-13a-3c.$$

Суммой (разностью) многочленов называется многочлен, коэффициенты которого являются суммой (разностью) коэффициентов при подобных членах этих многочленов. Например,

$$(5x+7xy-3)-(4x-2y+5xy)=(5-4)x+(7-5)xy+2y-3=x+2xy+2y-3.$$

Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить каждый член многочлена на одночлен и сложить полученные одночлены. Например,

$$(-5a)\cdot(4-b-a^2)=-20a+5ab+5a^3.$$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо умножить каждый член первого многочлена на каждый член второго многочлена и полученные одночлены сложить. Например,

$$(x+y)\cdot(x-a-b)=x\cdot x+x\cdot(-a)+x\cdot(-b)+y\cdot x+y(-a)+y\cdot(-b)=$$
$$=x^2-ax-bx+yx-ya-yb.$$

Упражнения

121. Прочитайте выражения:

алгебраическое выражение – алгебраические выражения;
одночлен – одночлены;
стандартный вид одночлена;
коэффициент одночлена;
подобные одночлены; привести подобные члены;
многочлен – многочлены;
сумма многочленов, разность многочленов;
умножить одночлен на многочлен;
умножить многочлен на многочлен.

122. Запишите одночлен в стандартном виде и укажите его коэффициент:

а) $2a^3b(-1/2\,ab)a^2b$; б) $p^2x^2(-1/2\,xp^3q)$;

в) $-2\frac{1}{3}a^3c^2\frac{1}{7}ac^2\,6abc$; г) $(2y)(3y^2)(dy^3)d^2y^2$.

123. Выполните умножение одночленов:

а) $-1\frac{3}{5}m^4c^2\cdot\left(-\frac{1}{2}m^3p^6\right)^3$; б) $(-0{,}01a^2c^5)^2\cdot 100c^4a$;

в) $2\frac{1}{4}x^5y^2\cdot\left(\frac{2}{3}xy^3\right)^3$; г) $(-5a^3b^7)^3\cdot\left(-\frac{1}{5}a^2b^6\right)^2$.

124. Приведите подобные одночлены:

а) $0{,}1x^2y^2-0{,}2x^2y^2+0{,}3x^2y^2$;
б) $2{,}1xab+2x+4xab-x+3x+3xab$;

в) $\frac{x}{6}+\frac{x}{3}+\frac{3x}{2}-\frac{4}{3}mn^2+0{,}2mn^2-1\frac{1}{3}mn^2$;

г) $\frac{13}{6}ab^2c^3-6{,}25ab^2c^3+\frac{1}{4}ab^2c^3+8ab^2c^3$.

125. Выполните умножение одночлена на многочлен:

а) $-0{,}2x\left(3x^3-xy^2+4x\right)$; б) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}b\right)\cdot 2a-b\cdot\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b\right)$;

в) $2ab\left(3a^2-2b^2\right)-3ab\left(4b^2-a^2\right)$; г) $-0{,}7x^2y^3\left(5x^4-xy^2+3y^3\right)$.

126. Выполните действия:

а) $\left(\frac{1}{2}ax-2(ax+3)\right)-(xa+1)-\left((ax-2)-\left(3-(ax-1)\right)\right)-4$;

б) $a-\left(b-(c-a-b)\right)+b+\left(a-(c-b-a)\right)$.

127. Выполните умножение многочленов:

а) $(a-4b)\left(a^2+3ab-6b^2\right)$; б) $\left(2x^2-x\right)\left(8x^2-2x\right)$.

128. Ответьте на вопросы:

а) Что такое алгебраическое выражение? Приведите пример.
б) Какое выражение называют одночленом? Приведите пример.
в) Что значит одночлен стандартного вида? Приведите пример.
г) Какие одночлены называются подобными? Приведите пример.
д) Что значит привести подобные члены? Приведите пример.
д) Что такое многочлен? Приведите пример.
е) Что называют суммой (разностью) многочленов? Приведите пример.
ж) Как умножить одночлен на многочлен? Приведите пример.
з) Как умножить многочлен на многочлен? Приведите пример.

11.2 Формулы сокращённого умножения

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
1	2	3
Формула	Formula	Formule
Формулы сокращённого умножения	Abbreviated multiplication formulas	Formules de multiplication abrégées
Разность квадратов	Difference of squares	Différence de carrés
Квадрат суммы	Square amount	Montant carré
Квадрат разности	Difference square	Carré de différence

1	2	3
Сумма кубов	Sum of cubes	Somme de cubes
Разность кубов	Cube difference	Différence de cube
Куб суммы	Cube amount	Montant du cube
Куб разности	Difference cube	Cube de différence
Выделение полного квадрата	All square selection	Sélection de tous les carrés

Для умножения многочленов применяют формулы сокращённого умножения.

Основные формулы сокращённого умножения

1. Разность квадратов: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

2. Квадрат суммы: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

3. Квадрат разности: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

4. Сумма кубов: $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

5. Разность кубов: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

6. Куб суммы: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

7. Куб разности: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Например, умножим многочлены, применив формулы сокращённого умножения:

1) $(3a-c^2)(3a+c^2)=(3a)^2-c^2=9a^2-c^2$;

2) $(5+x)(25-5x+x^2)=5^3+x^3=125+x^3$;

3) $(0{,}1-2b)^2=0{,}1^2-2\cdot 0{,}1\cdot 2b+(2b)^2=0{,}01-0{,}4b+4b^2$.

Представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов называется **разложением многочлена на множители**. Для разложения многочлена на множители применяются различные методы: формулы сокращённого умножения, вынесение общего множителя за скобки, метод группировки и другие.

Например, разложим многочлены на множители с помощью формул сокращённого умножения:

$$1)\ a^4-b^6=(a^2)^2-(b^3)^2=(a^2-b^3)(a^2+b^3);$$

$$2)\ \frac{1}{169}x^4+2x^2y^2+169y^4=\left(\frac{1}{13}x^2+13y^2\right)^2;$$

$$3)\ 0{,}027+y^9=0{,}3^3+(y^3)^3=(0{,}3+y^3)(0{,}09-0{,}3y^3+y^6).$$

При разложении на множители бывает полезным использовать **метод выделения полного квадрата** с помощью формулы

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2.$$

Например, выделим полный квадрат в выражениях:

1) $x^2+6x+7=x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2+7=\left(x+3\right)^2-2$;

2) $x^2+5x+11=x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+11=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{19}{4}$.

Упражнения

129. Прочитайте выражения:

формула, формулы, формулы сокращённого умножения;
умножение многочленов;
разность квадратов;
квадрат суммы, квадрат разности;
сумма кубов, разность кубов;
куб суммы, куб разности;
разложение многочлена на множители, разложить многочлен на множители;
выделение полного квадрата, выделить полный квадрат.

130. Выполнить умножение многочленов:

а) $(2-a)(4+2a+a^2)$; б) $(3ab+1)(3ab-1)$;
в) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$; г) $\left(0,4m^5+0,1n^3\right)\left(0,1n^3-0,4m^5\right)$;
д) $(a-x)(a+x)(a^2+x^2)$; е) $\left(x-2y\right)\cdot\left(x^2+2xy+4y^2\right)$.

131. Разложите многочлен на множители:

а) $2a^2+4a+2$; б) $\left(a+b\right)^2-\left(m-n\right)^2$;
в) $\left(3b-5\right)^2-49$; г) $a^4-\left(a-7\right)^2$;
д) $24ax+36a^2+4x^2$; е) $0,125-\left(m-n\right)^3$;
ж) $1000a^{12}+8c^3$; з) $121x^2-88xy+16y^2$.

132. Выделите полный квадрат:

а) $x^2-10x+1$; б) x^2+3x+8;
в) $x^2+12x-14$; г) x^2-x+30.

133. Ответьте на вопросы:

а) Зачем используют формулы сокращённого умножения?
б) Назовите формулу разность квадратов.
в) Назовите формулу квадрат суммы.
г) Назовите формулу квадрат разности.
д) Назовите формулу сумма кубов.
е) Назовите формулу разность кубов.
ж) Назовите формулу куб суммы.
з) Назовите формулу куб разности.

ЗАНЯТИЕ 12

12.1 Алгебраические дроби

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Алгебраическая дробь	Algebraic fraction	Fraction algébrique
Множество чисел	Set of numbers	Ensemble de nombres
Область допустимых значений (ОДЗ) дроби	Permissible rangeof fraction	Plage admissible
Выделение целого выражения	Selection (extraction) of the whole expression	Sélection de l’expre-ssion entière
Общий знаменатель	Common denominator	Dénominateur commun
Наименьший общий знаменатель	Lowest common denominator	Le plus petit dénominateur commun
Справедливо равенство	Fairness is fair	L’équité est juste
Числовое значение многочлена	The numerical value of a polynomial	La valeur numérique d’un polynôme

Алгебраическая дробь это дробь, числитель и знаменатель которой являются многочленами.

Например, дроби

$$\frac{7}{a^2},\quad \frac{-8x}{3bcy},\quad \frac{14a}{x+y},\quad \frac{x+y}{(2x-y)^3},\quad \frac{3x^2-y+x}{(a-b)(x+y)}$$

являются алгебраическими дробями.

Область допустимых значений (ОДЗ) алгебраической дроби A/B (A, B – многочлены), это множество чисел, при которых числовое значение многочлена B не равно нулю $(B \neq 0)$.

Например, ОДЗ алгебраической дроби $\frac{a \cdot (c^2+d^2)}{(c+d)^3}$ это множество чисел, таких, что $c \neq -d$.

Для любого многочлена P $(P \neq 0)$, справедливы равенства:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot P}{B \cdot P};\quad \frac{A}{B} = \frac{A : P}{B : P}.$$

Например,

$$\frac{x^4-16}{(x^2-4)(x+3)} = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x^2-4)(x+3)} = \frac{x^2+4}{x+3},\ \text{при}\ x \neq \pm 2,\quad x \neq -3.$$

12.2 Выделение целого выражения из алгебраической дроби

Если степень числителя дроби больше или равна степени знаменателя, то из алгебраической дроби можно **выделить целое выражение (целую часть)**. Например, из дроби $\dfrac{x^2-c}{x}$ можно выделить целое выражение, потому что степень буквы x в числителе больше степени буквы x в знаменателе.

Чтобы выделить целое выражение из дроби, нужно разделить числитель на знаменатель; частное записать как целое выражение, а остаток – в числитель дробной части.

Например, выделим целое выражение из дроби $\dfrac{x^2-c}{x}$.

Разделим числитель на знаменатель почленно, то есть разделим каждый член числителя на знаменатель, получим:

$$\frac{x^2-c}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{c}{x}=x-\frac{c}{x}.$$

Рассмотрим еще один пример, выделим целую часть из неправильной дроби $\dfrac{x^2-x+3}{x+2}$. Разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l}
x^2-x+3 & x+2 \\
\cline{2-2}
-\ x^2+2x & x-3 \\
\cline{1-1}
-3x+3 & \\
-\ -3x-6 & \\
\cline{1-1}
9 &
\end{array}$$

Итак, $\dfrac{x^2-x+3}{x+2}=x-3+\dfrac{9}{x+2}$.

12. 3 Общий знаменатель алгебраических дробей

Общим знаменателем нескольких алгебраических дробей называется многочлен, который делится на знаменатель каждой из этих дробей.

Например, для дробей $\dfrac{8x}{x+1}$ и $\dfrac{x-1}{x-3}$ общим знаменателем будет многочлен $(x+1)(x-3)$.

Общий знаменатель, на который делится любой другой общий знаменатель без остатка, называется **наименьшим общим знаменателем (НОЗ)**.

Для того, **чтобы привести несколько алгебраических дробей к НОЗ** на ОДЗ этих дробей, надо знаменатель каждой дроби разложить на множители, а затем числитель и знаменатель каждой дроби умножить на произведение тех множителей остальных дробей, которые не содержатся в знаменателе этой дроби.

Например, приведём к наименьшему общему знаменателю следующие дроби:

$$\frac{1}{a-b},\ \frac{1}{a^2-b^2},\ \frac{1}{a^3-b^3}.$$

Разложим знаменатели исходных дробей на множители:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b),$$

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right).$$

Числитель и знаменатель первой дроби умножим на $\left(a^2+ab+b^2\right)\cdot(a+b)$, второй – на a^2+ab+b^2, третьей – на $a+b$.

Получим следующие дроби:

$$\frac{1}{a-b}=\frac{(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)}{(a-b)(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)},\ \frac{1}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab+b^2}{(a-b)(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)},$$

$$\frac{1}{a^3-b^3}=\frac{a+b}{(a-b)(a+b)\left(a^2+ab+b^2\right)}.$$

12. 4 Арифметические действия с алгебраическими дробями

Сложение (вычитание)

Чтобы сложить (вычесть) две алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить (вычесть) их числители, а знаменатель оставить прежним, то есть:

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\ \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C},$$

при $C\neq 0$.

Например,

$$\frac{2n}{m-n}+\frac{m}{m-n}-\frac{2m+n}{m-n}=\frac{2n+m-(2m+n)}{m-n}=$$

$$=\frac{2n+m-2m-n}{m-n}=\frac{n-m}{m-n}=\frac{-(m-n)}{m-n}=-1,$$

при $m-n\neq 0,\ m\neq n$.

Чтобы сложить (вычесть) две алгебраические дроби с разными знаменателями, нужно привести эти дроби к наименьшему общему знаменателю, а затем полученные дроби сложить (вычесть) по правилу сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

Например, выполним действия $\dfrac{y+12}{8y+32}-\dfrac{y+4}{8y-32}+\dfrac{9}{y^2-16}$.

$$\frac{y+12}{8y+32}-\frac{y+4}{8y-32}+\frac{9}{y^2-16}=\frac{y+12}{8(y+4)}-\frac{y+4}{8(y-4)}+\frac{9}{(y+4)(y-4)}=$$

$$=\frac{(y+12)(y-4)-(y+4)(y+4)+9\cdot 8}{8(y+4)(y-4)}=\frac{y^2-4y+12y-48-y^2-8y-16+72}{8(y+4)(y-4)}=$$

$$=\frac{-64+72}{8(y+4)(y-4)}=\frac{8}{8(y+4)(y-4)}=\frac{1}{y^2-16},$$

при $y^2-16\neq 0,\ y\neq \pm 4$.

Умножение

Чтобы умножить две алгебраические дроби, надо умножить их числители и записать результат в числитель новой дроби, и умножить их знаменатели и записать результат в знаменатель новой дроби, то есть:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},$$

при $B,D\neq 0$.

Например, выполним действия: $\frac{x^2-25}{x^2-6x}\cdot\frac{x^2-36}{x^2+5x}$.

$$\frac{x^2-25}{x^2-6x}\cdot\frac{x^2-36}{x^2+5x}=\frac{(x^2-25)\cdot(x^2-36)}{(x^2-6x)\cdot(x^2+5x)}=\frac{(x-5)(x+5)(x-6)(x+6)}{x(x-6)\cdot x(x+5)}=$$

$$=\frac{(x-5)(x+6)}{x\cdot x}=\frac{x^2+x-30}{x^2},$$

при $\begin{cases} x^2-6x\neq 0, \\ x^2+5x\neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq 6, \\ x\neq -5. \end{cases}$

Деление

Чтобы разделить две алгебраические дроби, надо первую дробь умножить на обратную ко второй дроби, то есть:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}==\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C},$$

при $B,C,D\neq 0$

Например, выполним действия: $\frac{x^2-4x+4}{20x^3}:\frac{x-2}{5x}$, при $x\neq 0;\ x\neq 2$.

$$\frac{x^2-4x+4}{20x^3}:\frac{x-2}{5x}=\frac{x^2-4x+4}{20x^3}\cdot\frac{5x}{x-2}=\frac{(x-2)^2\cdot 5x}{20x^3\cdot(x-2)}=\frac{x-2}{4x^2}.$$

Степень алгебраической дроби

Для алгебраической дроби $\frac{A}{B}$ и натурального числа n справедливо равенство $\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$, при $B\neq 0$.

Упражнения

134. Прочитайте выражения:

алгебраическая дробь – алгебраические дроби;
область допустимых значений алгебраической дроби;
выделение целого выражения;
выделить целую часть алгебраической дроби;
действия с алгебраическими дробями;
сложение алгебраических дробей;
вычитание алгебраических дробей;
умножение алгебраических дробей;
деление алгебраических дробей;
возведение в степень алгебраических дробей.

135. Найдите ОДЗ дроби:

а) $\frac{1}{bc}-\frac{1}{a-c}$; б) $\frac{a^2-1}{a^3-1}\cdot\frac{b}{a}$;

в) $\frac{a}{b+c}-\frac{d}{b-c}$; г) $\frac{b+c}{a+d}:\frac{d-c}{c-a}$.

136. Выделите целое выражение из дроби:

а) $\frac{m-3}{m}$; б) $\frac{a^2-2a+7}{a-2}$;

в) $\frac{y^3+5y-3}{y^2+1}$; г) $\frac{3m^4-2m^2+9}{m^2-5}$.

137. Сократите дроби:

а) $\frac{4a^2b}{8ab^2}$; б) $\frac{6a^4x^3}{3a^6x^4}$;

в) $\frac{3(a+b)^2}{9a(a+b)}$; г) $\frac{8x(2-x)^3}{12x^2(2-x)}$;

д) $\frac{4(a-5)}{6(5-a)}$; е) $\frac{(a-b)(a-3)^2}{2(b-a)(a-3)}$;

ж) $\frac{ax+bx}{ax-bx}$; з) $\frac{x^2}{x^2+ax}$.

138. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{a^2}{b(a-1)}, \frac{1}{2a^2-6a+4}, \frac{b}{(a-2)^2}$; б) $\frac{1}{a^2+ab}, \frac{1}{b^2+ab}, \frac{1}{a^3b-b^3a}$;

в) $\frac{1+d}{a^2-4}, \frac{b}{a^2+4a+2}, \frac{1}{a^2+2a}$; г) $\frac{1}{a^3-b^3}, \frac{1}{a^2-b^2}, \frac{1}{a^2+ab+b^2}$.

139. Выполните сложение (вычитание):

а) $\frac{x+5}{2x-6}-\frac{x+1}{x-3}$; б) $\frac{4b+2}{3b-21}-\frac{3b-1}{14-2b}$;

в) $\frac{a+3}{3a-3}+\frac{2-a}{5a-5}$; г) $\frac{a+1}{a^2-b^2}-\frac{a-1}{b-a}$;

д) $\frac{a}{x-y}-\frac{b}{y-x}+\frac{c}{x-y}$; е) $a-\frac{a-2}{a^2-4}+\frac{a-3}{a+2}$;

ж) $\frac{5}{2a-3}+\frac{2}{2a+3}-\frac{a-1}{9-4a^2}$; з) $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{2x+6}-\frac{x}{2x^2-12x+18}$;

и) $\frac{4a^2-3a+5}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}+\frac{6}{1-a}$; к) $\frac{1}{a^2-ab}-\frac{3b^2}{a^4-ab^3}-\frac{b}{a^3+a^2b+ab^2}$.

140. Выполните умножение:

а) $\frac{26x^7}{51y^5}\cdot\frac{34y^3}{39x^3}$; б) $\frac{3a^2b^2}{4xy}\cdot\frac{10x^2y}{21a^4b}$;

в) $\frac{2xy-y^2}{3}\cdot\frac{9x}{y^5}$; г) $\frac{a^2-ax}{x}\cdot\frac{x^2}{a}$;

д) $\frac{x^2-xy}{x^2+xy}\cdot\frac{x^2y+xy^2}{x-y}$; е) $\frac{a^2-2ab}{a^2+3ab}\cdot\frac{a^2b+3ab^2}{a^3-2a^2b}$.

141. Выполните деление:

а) $\frac{32a^5}{15y^8}:\frac{4a^3}{45y^4}$; б) $\frac{72a^5b^4}{25y^8}:\left(24a^7b^9\right)$;

в) $54p^{10}n^{17}:\frac{27p^{12}n^{14}}{22a^6}$; г) $\frac{a^2+10a+25}{a^2-25}:\left(a+5\right)$;

д) $\frac{x-3}{4x+12}:\frac{2x-6}{x^2+3x}$; е) $\frac{x^2-9y^2}{16x^2-9y^2}:\frac{x^2+6xy+9y^2}{16x^2-24xy+9y^2}$.

142. Выполните действия:

а) $\left(\frac{a+3}{a-3}+\frac{a-3}{a+3}\right):\frac{3a^2+27}{9-a^2}$; б) $\left(\frac{b+9}{b-9}-\frac{b-9}{b+9}\right):\frac{18b^2}{81-b^2}$;

в) $\left(5x-\frac{10x}{x+1}\right):\frac{15x-15}{4x+4}$; г) $\left(3x-\frac{6x}{x+5}\right):\frac{9x+27}{8x+40}$;

д) $\frac{3x}{x-4}-\frac{x+2}{5x-20}\cdot\frac{240}{x^2+2x}$; е) $\frac{2z}{z-5}-\frac{z+7}{4z-20}\cdot\frac{200}{z^2+7z}$;

ж) $\left[\frac{8b}{b+7}-\frac{15b}{b^2+14b+49}\right]:\frac{8b+41}{b^2-49}+\frac{7b-49}{b+7}$;

з) $\left[\frac{4n}{n-4}-\frac{3n}{n^2-8n+16}\right]:\frac{4n-19}{n^2-16}+\frac{4n+16}{n-4}$.

143. Возведите в степень алгебраическую дробь:

а) $\left(-\dfrac{5a^3b^4}{0{,}2c^5d}\right)^2$; б) $\left(-\dfrac{0{,}1b^4x}{z^{-3}y^5}\right)^3$.

144. Ответьте на вопросы:

а) Что такое алгебраическая дробь?

б) Что называют областью допустимых значений (ОДЗ) алгебраической дроби?

в) Как привести алгебраические дроби к наименьшему общему знаменателю?

г) Как выделить целую часть в алгебраической дроби?

д) Как сложить (вычесть) две алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями?

е) Как сложить (вычесть) две алгебраические дроби с разными знаменателями?

ж) Как умножить две алгебраические дроби?

з) Как разделить две алгебраические дроби?

и) Как возвести в степень алгебраическую дробь?

Контрольные вопросы по теме «Алгебраические выражения»

1. Что такое степень числа? Приведите пример.
2. В выражении a^m назовите основание степени и показатель степени.
3. Что называют степенью с дробным показателем? Приведите пример.
4. Что такое арифметический корень степени n?
5. В выражении $\sqrt{b}$ назовите показатель корня.
6. В выражении $\sqrt{b}$ назовите подкоренное выражение.
7. Что такое алгебраическое выражение? Приведите пример.
8. Какое выражение называют одночленом? Приведите пример.
9. Что значит одночлен стандартного вида? Приведите пример.
10. Какие одночлены называются подобными? Приведите пример.
11. Что значит привести подобные члены? Приведите пример.
12. Что такое многочлен? Приведите пример.
13. Что называют суммой (разностью) многочленов? Приведите пример.
14. Как умножить одночлен на многочлен? Приведите пример.
15. Как умножить многочлен на многочлен? Приведите пример.
16. Зачем используют формулы сокращённого умножения?
17. Назовите формулу разность квадратов.
18. Назовите формулу квадрат суммы.
19. Назовите формулу квадрат разности.
20. Назовите формулу сумма кубов.
21. Назовите формулу разность кубов.

22. Назовите формулу куб суммы.

23. Назовите формулу куб разности.

24. Что такое алгебраическая дробь?

25. Что называют областью допустимых значений алгебраической дроби?

26. Как привести алгебраические дроби к наименьшему общему знаменателю?

27. Как выделить целую часть в алгебраической дроби?

28. Как сложить (вычесть) две алгебраические дроби с одинаковыми знаменателями?

29. Как сложить (вычесть) две алгебраические дроби с разными знаменателями?

30. Как умножить две алгебраические дроби?

31. Как разделить две алгебраические дроби?

32. Как возвести в степень алгебраическую дробь?

Модель контрольной работы по теме «Алгебраические выражения»

1. Найдите ОДЗ дроби:

а) $\dfrac{b-6}{b^2-16}$; б) $\dfrac{t-3}{t\left(t^3+1\right)}$.

2. Вычислите:

а) $\left(\sqrt{12}-3\right)\left(\sqrt{12}+3\right)$; б) $\left(\sqrt{12}-3\right)^2$;

в) $\left(4^4:800+0,4^2\right):(-0,2)^2$; г) $81^{-2,25}\cdot 9^{-\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{25}{9}}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{5-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{5+\sqrt{17}}$; б) $\dfrac{\sqrt[5]{3^7\cdot 4^{11}}}{\sqrt[5]{3^2\cdot 4^6}}$.

4. Упростите выражение:

а) $\left[\dfrac{n}{n^2-8n+16}-\dfrac{n+6}{n^2-16}\right]:\dfrac{n+12}{n^2-16}$;

б) $\left[\dfrac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}\right]:\dfrac{2\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}$.

5. Что такое алгебраическая дробь? Приведите пример.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

ЗАНЯТИЕ 13

13.1 Уравнения. Основные понятия

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Уравнение	The equation	L’équation
Неизвестная величина (переменная)	Unknown quantity(variable)	Quantité inconnue (variable)
Тождество	Identity	Identité
Решить уравнение	Solve the equation	Résoudre l’équation
Решение (корень) уравнения	Solution (root) of the equation	Solution (racine) de l’équation
Линейное уравнение	Linear equation	Équation linéaire
Квадратное уравнение	Quadratic equation	Équation quadratique
Дискриминант	Discriminant	discriminant
Трёхчленное уравнение	Three-term equatio	Équation à trois termes
Рациональное уравнение	Rational equation	Équation rationnelle
Замена переменной	Variable replacement	Remplacement variable

Уравнение – это равенство, которое содержит неизвестную величину (**переменную**). Например: $\frac{13}{24}x^2 - 7\cdot 1{,}1x = 0$ и $5x = 10$ – это уравнения, x – это неизвестная величина или переменная.

Значение переменной, при котором уравнение становится тождеством, называют **решением (корнем) уравнения**. Например: для уравнения $5x = 10$ корнем является число два, т.к. $5\cdot 2 = 10, 10 \equiv 10$.

Решить уравнение – значит найти все его корни или показать, что их нет.

13.2 Линейные уравнения

Линейное уравнение это уравнение вида

$$ax + b = 0,$$

где $a \neq 0$, a, b – числа, x – переменная.

Найдем корень линейного уравнения:

$$ax = -b,\ \ x = -\frac{b}{a}.$$

Например, решим линейное уравнение $x+\frac{x-5}{2}=\frac{1}{5}-\frac{3-2x}{3}$. Найдем НОК дробей: НОК(2; 3; 5) $=2\cdot3\cdot5=30$, умножим обе части уравнения на тридцать, получим:

$$30\cdot x+30\cdot\frac{x-5}{2}=30\cdot\frac{1}{5}-30\cdot\frac{3-2x}{3},$$

сократим:

$$30\cdot x+15\cdot(x-5)=6-10\cdot(3-2x),$$

раскроем скобки:

$$30x+15x-75=6-30+20x,\ 25x=51,\ x=\frac{51}{25}.$$

Ответ: $x=\frac{51}{25}$.

13.3 Квадратные уравнения

Квадратное уравнение это уравнение вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где $a\neq0$, a, b, c – числа, x – переменная.

Чтобы решить квадратное уравнение, нужно вычислить **дискриминант:**

$$D=b^2-4ac$$

I случай. Если D >0, то $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

II случай. Если D =0, то $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$.

III случай. Если D < 0, то нет действительных корней $\left(x\notin R\right)$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим квадратное уравнение $x^2-6x+8=0$. Вычислим дискриминант, для этого найдём коэффициенты квадратного уравнения: $a=1, b=-6, c=8$, тогда $D=\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot8=36-32=4$, получили дискриминант больший нуля (*I случай*), тогда: $x_1=\frac{6-\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{4}{2}=2$, $x_2=\frac{6+\sqrt{4}}{2\cdot1}=\frac{8}{2}=4.$

Ответ: $x_1=2, x_2=4$.

Пример 2. Решим квадратное уравнение $25x^2-10x+1=0$. Вычислим дискриминант, для этого найдём коэффициенты квадратного уравнения:

$a=25, b=-10, c=1$, тогда $D=\Delta=(-10)^2-4\cdot 25\cdot 1=100-100=0$, получили дискриминант равный нулю (*II случай*), тогда: $x_1=x_2=\dfrac{10}{2\cdot 25}=\dfrac{1}{5}$.

Ответ: $x_1=x_2=\dfrac{1}{5}$.

Пример 3. Решим квадратное уравнение $2x^2+3x+9=0$. Вычислим дискриминант, для этого найдём коэффициенты квадратного уравнения: $a=2, b=3, c=9$, тогда $D=\Delta=3^2-4\cdot 2\cdot 9=9-72=-63$, получили дискриминант, который меньше нуля (это *III случай*), тогда уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: нет действительных корней.

Если в квадратном уравнении коэффициент $a=1$, то уравнение $x^2+bx+c=0$ называют **приведённым квадратным уравнением**. Его удобно решать с помощью теоремы Виета.

Теорема Виета. Если x_1, x_2 корни квадратного уравнения $x^2+bx+c=0$ тогда $\begin{cases} x_1\cdot x_2=c, \\ x_1+x_2=-b. \end{cases}$

Рассмотрим пример. Решим уравнение $x^2+5x+6=0$, по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=6, \\ x_1+x_2=-5. \end{cases}$$

Рассмотрим пары чисел, которые при умножении дают число шесть: $1\cdot 6=6,\ 2\cdot 3=6,\ (-1)\cdot(-6)=6,\ (-2)\cdot(-3)=6$. Из этих пар выберем одну, которая в сумме дает минус пять: $(-2)+(-3)=-5$. Итак, $x_1=-2, x_2=-3$.

Ответ: $x_1=-2, x_2=-3$.

13.4 Трёхчленные уравнения

Трёхчленное уравнение это уравнение вида

$$ax^{2n}+bx^n+c=0,$$

где $a\neq 0, n\geq 2$, a, b, c, n – числа, x – переменная.

Чтобы решить трёхчленное уравнение, сделаем **замену переменной:**

$$x^n=t, \left[\begin{array}{l} t\geq 0, \\ t\in R, \end{array}\right. \text{ при } \left[\begin{array}{l} n=2k, \\ n=2k-1, \end{array}\right. \quad k\in N,$$

тогда уравнение примет вид

$$at^2+bt+c=0.$$

Далее решаем как квадратное уравнение.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим уравнение $x^8-17x^4+16=0$.

Заменим $x^4 = t,\ t \ge 0$, получим уравнение $t^2 - 17t + 16 = 0$, откуда найдем $t_1 = 1$ и $t_2 = 16$. Таким образом, данное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^4 = 1, \\ x^4 = 16, \end{array}\right.$$

решая которую находим $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2.$

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2.$

Пример 2. Решим уравнение $x^6 - 11x^3 - 12 = 0$. Сделаем замену $x^3 = t$, $t \in R$, тогда уравнение примет вид $t^2 - 11t - 12 = 0$. По теореме Виета

$$\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = -12, \\ t_1 + t_2 = 11, \end{cases}$$

тогда $t_1 = -1, t_2 = 12$. Выполним обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} x^3 = -1,\ x = \sqrt[3]{-1} = -1; \\ x^3 = 12,\ x = \sqrt[3]{12}\,. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = \sqrt[3]{12}$.

Трёхчленное уравнение $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ называется **биквадратным**, если $n = 2$, т. е. $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Заменяя $x^2 = t,\ t \ge 0$, данное уравнение можно записать в виде: $at^2 + bt + c = 0$.

Решим уравнение $x^4 + 13x^2 + 12 = 0$. Сделаем замену $x^2 = t, t \ge 0$, тогда уравнение примет вид $t^2 + 13t + 12 = 0$. По теореме Виета $\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = 12, \\ t_1 + t_2 = -13, \end{cases}$ тогда $t_1 = -1, t_2 = -12$. Так как оба корня меньше нуля, то трёхчленное уравнение не имеет действительных корней.

Если уравнение $at^2 + bt + c = 0$ решений не имеет, то трёхчленное уравнение также решений не имеет.

Упражнения

145. Прочитайте выражения:

уравнение – уравнения;
неизвестная величина, переменная;
тождество – тождества;
решение уравнения, корень уравнения;
решить уравнение;
линейное уравнение – линейные уравнения;
квадратное уравнение – квадратные уравнения;
дискриминант, вычислить дискриминант;
трёхчленное уравнение – трёхчленные уравнения;

биквадратное уравнение – биквадратные уравнения;
замена переменной, сделаем замену переменной.

146. Решите линейные уравнения:

а) $2x-3=3x-(1+x)$;
б) $2(x-2{,}5)+x-3=1$;
в) $\frac{x-1}{3}+2=\frac{x-1}{6}+\frac{1}{2}$;
г) $\frac{x-2}{6}+\frac{x-1}{15}=3-\frac{3-x}{12}$;
д) $\frac{2x+1}{3}-0{,}1=\frac{3x+2}{5}-\frac{x}{6}$;
е) $\frac{2x-1}{18}+\frac{2-3x}{24}+\frac{4-5x}{36}+\frac{1}{6}=0$.

147. Решите квадратные уравнение:

а) $10x^2-9x+2=0$;
б) $2x^2-4x-17=0$;
в) $x^2-6x+9=0$;
г) $25x^2+10x+1=0$;
д) $x^2-10x+37=0$;
е) $x^2-2x+47=0$;
ж) $x^2-13x+40=0$;
з) $x^2-18x+17=0$.

148. Решите трёхчленные уравнение:

а) $3x^4-28x^2+9=0$;
б) $2x^6-19x^3+9=0$;
в) $3x^8-7x^4+2=0$;
г) $x^4-13x^2+36=0$;
д) $x^6-29x^3+100=0$;
е) $x^4-37x^2+36=0$;
ж) $4x^6-17x^3+4=0$;
з) $9x^6-22x^3+8=0$.

149. Решите уравнения:

а) $3(x-4)^2=5x-20$;
б) $7(6-5x)^2=15x-18$;
в) $9(x-7)^2=14-2x$;
г) $27x-12=2(4-9x)^2$;
д) $45x-18=5(2-5x)^2$;
е) $3-4x=(4x-3)^2$.

150. Ответьте на вопросы:

а) Что такое уравнение?
б) Что называют решением (корнем) уравнения?
в) Что значит решить уравнение?
г) Какое уравнение называется линейным? Приведите пример.
д) Какое уравнение называют квадратным? Приведите пример.
е) Назовите формулу для дискриминанта.
ж) Сколько корней имеет квадратное уравнение, если дискриминант больше нуля? Назовите формулу для их вычисления.
з) Сколько корней имеет квадратное уравнение, если дискриминант равен нулю? Назовите формулу для их вычисления.
и) Сколько корней имеет квадратное уравнение, если дискриминант меньше нуля?
к) Какое уравнение называют трёхчленным? Приведите пример.
л) Что такое биквадратное уравнение?

ЗАНЯТИЕ 14

14.1 Рациональные уравнения

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Рациональное уравнение	Rational equation	Équation rationnelle
Система уравнений	System of equations	Le systèmedes équations
Совокупность уравнений	Set of equations	Ensemble d'équations

Рациональное уравнение это уравнение вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0,$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены, $Q(x)\neq 0$.

Чтобы решить рациональное уравнение, надо решить систему

$$\begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$$

Например, решим уравнение $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}=1$.

Приведём его к виду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, для этого приведём дроби к наименьшему общему знаменателю:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-2}-1=0;$$

$$\frac{(x-2)+2(x+1)-(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=0;$$

$$\frac{x^2-4x-2}{(x+1)(x-2)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2-4x-2=0, \\ (x+1)(x-2)\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=2+\sqrt{6},\ x_2=2-\sqrt{6}, \\ x\neq -1,\ x\neq 2. \end{cases}$$

Ответ: $x_1=2+\sqrt{6},\ x_2=2-\sqrt{6}$.

Уравнения вида

$$\frac{Ax}{ax^2+b_1x+c}+\frac{Bx}{ax^2+b_2x+c}=C, \qquad (14.1)$$

где $ABC \neq 0$, $ac \neq 0$, заменой переменной $y = ax + \frac{c}{x}$ сводится к решению уравнения $\frac{A}{y+b_1}+\frac{B}{y+b_2}=C$.

Например, решим уравнение

$$\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2}.$$

Так как число $x=0$ не является корнем данного уравнения, то, разделив на x числитель и знаменатель каждой дроби в левой части уравнения, получим уравнение, равносильное данному:

$$\frac{4}{x+\frac{3}{x}+1}+\frac{5}{x+\frac{3}{x}-5}=-\frac{3}{2}.$$

Сделаем замену: $y = x + \frac{3}{x}$, получим уравнение

$$\frac{4}{y+1}+\frac{5}{y-5}=-\frac{3}{2},$$

приведём дроби к общему знаменателю, выполним алгебраические преобразования, получим равносильное уравнение:

$$\frac{y^2+2y-15}{(y+1)(y-5)}=0.$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} y^2+2y-15=0, \\ (y+1)(y-5)\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1=-5,\ y_2=3, \\ y\neq -1,\ y\neq 5. \end{cases}$$

Выполним обратную замену:

$$\left[\begin{aligned} & x+\frac{3}{x}=-5, \\ & x+\frac{3}{x}=3. \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} & \frac{x^2+5x+3}{x}=0, \\ & \frac{x^2-3x+3}{x}=0. \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x+3=0; \\ x^2-3x+3=0. \end{array}\right.$$

Для первого уравнения совокупности имеем:

$$D=5^2-4\cdot 3=13,$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2},$$

для второго уравнения совокупности:

$$D=(-3)^2-4\cdot 3=-3<0 \Rightarrow$$

второе уравнение совокупности не имеет действительных корней.

Ответ: $x_1=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}$.

Уравнения вида

$$\frac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c}\pm\frac{ax^2+b_3x+c}{ax^2+b_4x+c}=A,$$

а также уравнения вида

$$\frac{ax^2+b_1x+c}{ax^2+b_2x+c}=\frac{A}{ax^2+b_3x+c},\ A\neq 0,$$

где $ac\neq 0$, решаются аналогично уравнению вида (14.1).

Например, решим уравнение

$$\frac{x^2-13x+15}{x^2-14x+15}-\frac{x^2-15x+15}{x^2-16x+15}=-\frac{1}{12}.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-14x+15\neq 0, \\ x^2-16x+15\neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\neq 1,\ x\neq 15; \\ x\neq 7\pm\sqrt{34}. \end{cases}$

Так как $x=0$ не является корнем данного уравнения, то оно равносильно уравнению

$$\frac{x-13+\dfrac{15}{x}}{x-14+\dfrac{15}{x}}-\frac{x-15+\dfrac{15}{x}}{x-16+\dfrac{15}{x}}=-\frac{1}{12}.$$

Сделаем замену: $x+\dfrac{15}{x}=y$, получим уравнение

$$\frac{y-13}{y-14}-\frac{y-15}{y-16}=-\frac{1}{12},$$

решая которое, находим $y_1=20, y_2=10$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{15}{x}=20, \\ x+\dfrac{15}{x}=10, \end{array}\right.$$

решая которую, находим $x_1 = 10+\sqrt{85}$, $x_2 = 10-\sqrt{85}$, $x_3 = 5+\sqrt{10}$, $x_4 = 5-\sqrt{10}$.

Для упрощения вычислений при решении рациональных уравнений иногда применяется **метод разложения на простые дроби.**

Рассмотрим пример, решим уравнение

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4.$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-1\neq 0, \\ x+2\neq 0, \\ x+3\neq 0, \\ x-4\neq 0, \end{cases} \begin{cases} x\neq 1, \\ x\neq -2, \\ x\neq -3, \\ x\neq 4. \end{cases}$

Так как

$$\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1},\ \frac{x-2}{x+2}=1-\frac{4}{x+2},$$
$$\frac{x-3}{x+3}=1-\frac{6}{x+3},\ \frac{x+4}{x-4}=1+\frac{8}{x-4},$$

то данное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}+\frac{4}{x-4}=0.$$

Сделаем тождественные преобразования, получим уравнение

$$\frac{5x-8}{(x-1)(x-4)}=\frac{5x+12}{(x+2)(x+3)}.$$

Учитывая ОДЗ, получаем

$$(5x-8)(x+2)(x+3)=(5x+12)(x-1)(x-4),$$
$$x^2+x-\frac{16}{5}=0,$$
$$D=1^2+4\cdot\frac{16}{5}=\frac{69}{5},$$
$$x_1=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{69}{5}}\right);x_2=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{\frac{69}{5}}\right).$$

Так как эти числа принадлежат ОДЗ, то они являются корнями исходного уравнения.

При решении рациональных уравнений иногда применяются: **метод выделения полного квадрата**; метод, использующий однородность уравнения относительно некоторых функций; метод сведения к решению систем уравнений, а также метод сведения к некоторым специальным уравнениям (например, квадратным, биквадратным и т. п.).

Например, решим уравнение

$$x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8.$$

Найдем ОДЗ: $x-1\neq 0,\ x\neq 1$.

Выделим полный квадрат:

$$x^2+2x\frac{x}{x-1}+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-2x\frac{x}{x-1}=8,$$

$$\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x-1}=8,$$

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}=8.$$

Сделаем замену $\frac{x^2}{x-1}=y$, получим уравнение $y^2-2y-8=0$, корнями которого являются числа $y_1=4,\ y_2=-2$.

Сделаем обратную замену, получим совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x^2}{x-1}=4,\\ \frac{x^2}{x-1}=-2,\end{array}\right.$$

решениями которой, а, следовательно, и исходного уравнения являются

$$x_1=2,\ x_{2,\,3}=-1\pm\sqrt{3}.$$

Рассмотрим еще пример, решим уравнение

$$5\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-44\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+12\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$$

Найдем ОДЗ: $x+1\neq 0,\ x-1\neq 0$.

Заметим, что $\frac{x^2-4}{x^2-1}\equiv\frac{x-2}{x+1}\cdot\frac{x+2}{x-1}$. Обозначим $u=\frac{x-2}{x+1}$ и $v=\frac{x+2}{x-1}$, тогда данное уравнение запишется в виде

$$5u^2-44v^2+12uv=0.$$

В левой части уравнения стоит однородная функция второй степени относительно u и v.

Если $v=0$, то из представленного уравнения следует $u=0$.

Если $v\neq 0$, то, разделив обе части полученного уравнения на v^2, получим уравнение относительно $\frac{u}{v}$:

$$5\left(\frac{u}{v}\right)^2+12\left(\frac{u}{v}\right)-44=0,$$

$$D=12^2+4\cdot 5\cdot 44=1024,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)_1 = \frac{-12+32}{10} = 2; \left(\frac{u}{v}\right)_2 = \frac{-12-32}{10} = -4,4.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{x+1} = 0, \\ \dfrac{x+2}{x-1} = 0, \end{array}\right. \\ \dfrac{x-2}{x+1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{-1} = 2, \\ \dfrac{x-2}{x+1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{-1} = -4,4. \end{array}\right.$$

Так как система решений не имеет, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x-2}{x+1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{-1} = 2, \\ \dfrac{x-2}{x+1}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{-1} = -4,4, \end{array}\right.$$

которая в свою очередь равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (x-2)(x-1) - 2(x+1)(x+2) = 0, \\ (x-2)(x-1) + 4,4(x+1)(x+2) = 0, \end{array}\right. \\ (x+2)(x-1)(x+1) \neq 0. \end{array}\right.$$

Решением этой системы, а следовательно, и исходного уравнения являются числа $x_{1,\,2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{73}}{2}$.

Упражнения

151. Прочитайте выражения:

рациональное уравнение – рациональные уравнения;
ОДЗ рационального уравнения;
решить рациональное уравнение;
исходное уравнение;
совокупность уравнений;
метод введения замены переменной;
метод выделения полного квадрата;
метод разложения на простейшие дроби.

152. Решите уравнения:

а) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}=0$; б) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x+2}=1$;

в) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{4}{x+1}=2$; г) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{3x}{2x-2}=-\dfrac{5}{2}$;

д) $\dfrac{2x-3}{x-1}+1=\dfrac{6x-x^2-6}{x-1}$; е) $\dfrac{9+2x}{x-3}=\dfrac{x-3}{x+3}$;

ж) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{2}$; з) $\dfrac{x+5}{5-x}=\dfrac{11}{9}$;

и) $\dfrac{x-3}{x-7}+\dfrac{x-7}{x-3}=2$; к) $\dfrac{4x^2}{x-1}-8=17$.

153. Решите уравнения:

а) $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$; б) $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=-\dfrac{5}{2}$;

в) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}$; г) $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-15}=2$;

д) $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1}-\dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$; е) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{3x}{2x-2}=-\dfrac{5}{2}$;

ж) $\dfrac{x+9}{x^2-3x-10}-\dfrac{x+15}{x^2-25}=\dfrac{1}{x+2}$; з) $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2+\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2=\dfrac{40}{9}$;

и) $\dfrac{1}{x^2-3x+3}+\dfrac{2}{x^2-3x+4}=\dfrac{6}{x^2-3x+5}$;

к) $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{1}{x^2-2x+3}=\dfrac{9/2}{x^2-2x+4}$.

154. Решите уравнения:

а) $\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^4-8\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^2=9$; б) $\dfrac{5}{x(x-8)}+\dfrac{1}{(x-4)^2}=\dfrac{2}{3}$;

в) $\dfrac{33}{x^2-6x+8}-x^2+6x=16$; г) $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2$;

д) $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$; е) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{10}{9}$;

ж) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1$; з) $3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=4$;

и) $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$;

к) $2\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x^2-9}{x^2-1}\right)=0.$

155. Ответьте на вопросы:

а) Какие уравнения называются рациональными? Приведите пример.
б) Как решить рациональное уравнение?
в) Назовите методы решения рациональных уравнений.

ЗАНЯТИЕ 15

15.1 Системы алгебраических уравнений

Словарь новых слов

Русский	**Английский**	**Французский**
Система алгебраических уравнений	System of algebraic equations	Système d'équations algébriques
Решение системы уравнений	Solution of the system of equations	Résoudre un système d'équations

Два или более уравнений образуют **систему уравнений**, если они имеют общее решение. **Решением системы двух уравнений** называется пара чисел $(x_0,\, y_0)$, которая каждое уравнение системы обращает в тождество. **Решить систему** – значит найти все ее решения или показать, что их нет.

Системой алгебраических уравнений называется система уравнений вида

$$\begin{cases} P_1(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_n)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_m(x_1,\, x_2,\ldots,\, x_n)=0, \end{cases}$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_m$ – многочлены относительно переменных $x_1,\, x_2,\ldots,\, x_n$.

Основными методами решения систем алгебраических уравнений являются метод подстановки, метод замены переменных и метод сложения.

Например, решим систему

$$\begin{cases} 2x^2-xy+3y^2-7x-12y+1=0, \\ x-y=-1; \end{cases}$$

методом подстановки.

Из второго уравнения выразим x через y, получим $x=y-1$; подставим это значение в первое уравнение. Тогда данная система равносильна системе

$$\begin{cases} x=y-1, \\ 2(y-1)^2-y(y-1)+3y^2-7(y-1)-12y+1=0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1, \\ 2y^2 - 11y + 5 = 0. \end{cases}$$

Решая второе уравнение этой системы, найдем $y_1 = 5, y_2 = 1/2$. Подставляя найденные значения y в первое уравнение, найдем $x_1 = 4, x_2 = -1/2$. Следовательно, решения данной системы есть $(4;\, 5);\ (-1/2;\, 1/2)$.

Рассмотрим второй пример, решим систему

$$\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ xy + x - y = 13; \end{cases}$$

методом сложения.

Первое уравнение не меняем, а ко второму уравнению прибавляем первое, получаем систему, равносильную данной

$$\begin{cases} xy - x + y = 7, \\ 2xy = 20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - x + y = 7, \\ x = \dfrac{10}{y}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - \dfrac{10}{y} + y = 7, \\ x = \dfrac{10}{y}; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 3y - 10 = 0,\ y \neq 0, \\ x = \dfrac{10}{y}; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = -5,\ x_1 = \dfrac{10}{-5} = -2, \\ y_2 = 2,\ x_2 = \dfrac{10}{5} = 5. \end{array} \right.$$

Получаем ответ $(5;\, 2);\ (-2;\, -5)$.

Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0, \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases}$$

называется **алгебраической системой уравнений второго порядка от двух переменных**.

Метод решения данной системы состоит в замене данной системы системой, ей равносильной, в одно из уравнений которой переменные x или y входят в первой степени, и применении метода подстановки для решения полученной системы. Если $a_1a_2 \neq 0$, то такое уравнение можно получить, умножив первое уравнение на a_2, второе на a_1 и вычитая из одного полученного уравнения другое.

Например, решим систему

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ x^2 + 3y^2 - xy - 4y = -1. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на -1 и сложим со вторым уравнением. Тогда получим систему

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1, \\ 7y^2 - 9y = -2, \end{cases}$$

равносильную исходной.

Из второго уравнения системы находим $y_1 = 2/7$ и $y_2 = 1$. Подставим эти значения вместо неизвестной y в первое уравнение, получим уравнение $49x^2 - 14x + 5 = 0$, которое не имеет решений, и уравнение $x^2 - x = 0$, имеющее корни $x = 0$ и $x = 1$.

Таким образом, данная система имеет два решения $(0;1)$ и $(1;1)$.

Теперь рассмотрим метод замены переменной на примере системы

$$\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 + a, \\ y^2 = (z-x)^2 + b, abc \neq 0. \\ z^2 = (x-y)^2 + c, \end{cases}$$

Применим формулы сокращённого умножения, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-y+z)(x+y-x) = a, \\ (y-z+x)(y+z-x) = b, \\ (z-x+y)(z+x-y) = c. \end{cases}$$

Сделаем замену переменных, пусть $x+y-z=u,\ x-y+z=v,\ \ -x+y+x=w,$ тогда получим для u, v, w систему уравнений

$$\begin{cases} uv = a, \\ uw = b, \\ vw = c, \end{cases}$$

откуда находим $(abc \neq 0 \Rightarrow uvw \neq 0)$

$$\begin{cases} (uvw)^2 = abc, \\ u = \dfrac{uvw}{vw}, \\ v = \dfrac{uvw}{uw}, \\ w = \dfrac{uvw}{uv}. \end{cases}$$

Таким образом, если $abc > 0$, то $u_1 = \sqrt{abc}/c$, $u_2 = -\sqrt{abc}/c$, $v_1 = \sqrt{abc}/b$, $v_2 = -\sqrt{abc}/b$, $w_1 = \sqrt{abc}/a$, $w_2 = -\sqrt{abc}/a$, а если $abc < 0$, то система решений не имеет.

Возвращаясь к старым переменным, находим, что при любых $a, b, c\ (abc > 0)$ решениями исходной системы являются тройки чисел

$$\left(\frac{b+c}{2bc}\sqrt{abc};\ \frac{a+c}{2ac}\sqrt{abc};\ \frac{a+b}{2ab}\sqrt{abc}\right),$$

и

$$\left(-\frac{b+c}{2bc}\sqrt{abc};\ -\frac{a+c}{2ac}\sqrt{abc};\ -\frac{a+b}{2ab}\sqrt{abc}\right).$$

Упражнения

156. Прочитайте выражения:

система уравнений – системы уравнений;
решение системы уравнений;
решить систему уравнений;
система алгебраических уравнений;
методы решения систем уравнений;
метод сложения;
метод подстановки;
метод замены переменной.

157. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} y+3x=11 \\ 2x-y=9 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} 4x+9y=1 \\ 5x-18y=-28 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 6x+5y=-8 \\ 4x+7y=2 \end{cases}$;   г) $\begin{cases} 5x+2y=25 \\ 3x+4y=29 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{3}-\dfrac{x-2y}{2}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{2x+y}{2}-\dfrac{x+2y}{3}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$;   е) $\begin{cases} x+\dfrac{2}{x-y}=3 \\ y-\dfrac{2}{x-y}=-1 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} x^2-xy-3y=5 \\ y-2x=0 \end{cases}$;   з) $\begin{cases} 2x^2+xy+y^2=8 \\ x+y=3 \end{cases}$.

158. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^2+xy-6y^2=0 \\ x^2-4xy+3y^2=-3 \end{cases}$;   б) $\begin{cases} 8x^2+2xy-3y^2=0 \\ 4x^2-3xy-9y^2=-38 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x^2-3xy-y^2=0 \\ 32x^2-36xy+9y^2=6 \end{cases}$;   г) $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=6 \\ 3x^2-2xy-2y^2=3 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x^2-y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$;   е) $\begin{cases} 2x^2+3y^2-4xy=3 \\ 2x^2-y^2=7 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-5 \\ 2x^2-xy+2y^2=20 \end{cases}$;   з) $\begin{cases} 5x^2+2xy+y^2=20 \\ x^2+2xy+2y^2=25 \end{cases}$;

и) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x+y+2xy=38 \end{cases}$;   к) $\begin{cases} x+3xy+y=9 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$.

Контрольные вопросы по теме «Рациональные уравнения и системы уравнений»

1. Что такое уравнение?
2. Что называют решением (корнем) уравнения?
3. Что значит решить уравнение?
4. Какое уравнение называется линейным? Приведите пример.
5. Какое уравнение называется квадратным? Приведите пример.
6. Назовите формулу для дискриминанта.
7. Сколько корней имеет квадратное уравнение, если дискриминант больше нуля? Назовите формулу для их вычисления.
8. Сколько корней имеет квадратное уравнение, если дискриминант равен нулю? Назовите формулу для их вычисления.
9. Сколько корней имеет квадратное уравнение, если дискриминант меньше нуля?
10. Какое уравнение называют трёхчленным? Приведите пример.
11. Что такое биквадратное уравнение? Приведите пример.
12. Какие уравнения называются рациональными? Приведите пример.
13. Как правильно решить рациональное уравнение?
14. Назовите методы решения рациональных уравнений.
15. Что такое система алгебраических уравнений? Приведите пример.
16. Что значит решить систему?
17. Назовите методы решения систем алгебраических уравнений.

Модель контрольной работы к теме «Рациональные уравнения и системы уравнений»

1. Решите линейное уравнение: $\frac{3x+7}{8}-\frac{2x+1}{3}=\frac{1+x}{2}$.

2. Решите квадратные и трёхчленное уравнения:

а) $15x^2+8x+1=0$; б) $x^2+6x+9=0$;

в) $4x^2+5x+3=0$; г) $25x^4-40x^2+16=0$.

3. Решите дробно-рациональное уравнение: $\frac{x}{x-4}-\frac{1}{x+1}=\frac{2-x}{x+1}+\frac{3}{x-4}$.

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^2-y=14; \\ 3x+y=4. \end{cases}$

5. Какое уравнение называется линейным? Приведите пример.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

ЗАНЯТИЕ 16

16.1 Числовые промежутки

Словарь новых слов

Русский	**Английский**	**Французский**
Числовой промежуток	Numeric interval	Intervalle numérique
Закрытый числовой промежуток	Closed numeric interval	Intervallenumérique fermée
Отрезок	Segment, section	Segment, coupé
Открытый числовой промежуток	Open numeric interval	Intervalle numérique ouvert
Полуинтервал	Semi-interval	Demi-intervalle
Полуоткрытый	Half open	Moitié ouverte
Бесконечный интервал	Infinite interval	Intervalle infini
Пустое множество	Empty set	Ensemble vide

Множество чисел $\{x \in R \mid a \le x \le b\}$ называют **закрытым числовым промежутком** или **отрезком**, числа *a* и *b* принадлежат этому промежутку. Обозначают отрезок так: $[a\,;b]$, запись вида $x \in [a\,;b]$ читают «икс принадлежит отрезку от *a* до *b*».

Множество чисел $\{x \in R \mid a < x < b\}$ называют **открытым числовым промежутком** или **интервалом**, числа *a* и *b* не принадлежат этому промежутку. Обозначают интервал так: $]a\,;b[$ или $(a\,;b)$, запись вида $x \in (a\,;b)$ читают «икс принадлежит интервалу от *a* до *b*».

Множество чисел $\{x \in R \mid a \le x < b\}$ и $\{x \in R \mid a < x \le b\}$ называют **полуоткрытыми числовыми промежутками** или **полуинтервалами**, в первом случае число *b* не принадлежат промежутку, во втором случае число *a* не принадлежит. Обозначают полуинтервалы так: в первом случае $[a\,;b)$ или $[a\,;b[$, во втором случае $(a\,;b]$ или $]a\,;b]$. Запись вида $x \in [a\,;b)$ читают «икс принадлежит полуинтервалу от *a* до *b*, *a* принадлежит полуинтервалу»; $x \in (a\,;b]$ «икс принадлежит полуинтервалу от *a* до *b*, *b* принадлежит полуинтервалу».

Числовой промежуток $(-\infty\,;+\infty)$ («от минус бесконечности до плюс бесконечности») является множеством всех действительных R чисел.

Числовые промежутки вида $]a\,;+\infty[$, $]-\infty\,;b[$, $]-\infty\,;+\infty[$ или $(a\,;+\infty)$, $(-\infty\,;b)$, $(-\infty\,;+\infty)$ называются **бесконечными интервалами**.

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется **пустым множеством**. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Запись вида $x \in \varnothing$ читают «икс принадлежит пустому множеству».

16.2 Числовые неравенства

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Неравенство	Inequality	L'inégalité
Строгое неравенство	Strictinequality	Inégalité stricte
Нестрогое неравенство	Loose inequality	Inégalité lâche
Равносильные неравенства	Equivalent inequalities	Inégalités équivalentes
Свойство транзитивности	Transitivity property	Propriété de transitivité
Линейное неравенство	Linear inequality	Inégalité linéaire
Решение линейного неравенства	Solution of linear inequality	Solution d’inégalité linéaire
Система линейных неравенств	The system of linear inequalities	Système d’inégalités linéaires
Решение системы линейных неравенств	The solution of a system of linear inequalities	Solution d’un système d’inégalités linéaires

Два действительных числа или два алгебраических выражения образуют **неравенство**, если их соединяет знак > (больше), или знак < (меньше), или знак ≤ (меньше или равно), или знак ≥ (больше или равно) или знак ≠ (не равно).

Мы читаем неравенства так:

1) $6 > -2$ (шесть больше, чем минус два);
2) $a + b < c$ (*a* плюс *b* меньше, чем *c*);
3) $\frac{1}{2} + x \geq 5$ (одна вторая плюс икс больше или равно пяти);
4) $\frac{m-2}{3} \leq 5m$ (дробь $\frac{m-2}{3}$ меньше или равна $5m$);
5) $7 \neq 2$ (семь не равно двум).

Если неравенство содержит знак < или знак >, то оно называется **строгим неравенством**.

Если неравенство содержит знак ≤ или знак ≥, то оно называется **нестрогим неравенством**.

Свойства числовых неравенств:

1. Если $a > b$, то $b < a$ и, наоборот, если $a < b$, то $b > a$.
2. Свойство транзитивности. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

3. Если $a > b$ и m - любое действительное число, то $a + m > b + m$, то есть, если к левой и правой частям неравенства, прибавить одно и то же число, то смысл неравенства не изменится.

4. Если $a > b$ и $m > 0$, то $a \cdot m > b \cdot m$ и $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$, то есть, если левую и правую части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то смысл неравенства не изменится.

5. Если $a > b$ и $m < 0$, то $a \cdot m < b \cdot m$ и $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$, то есть, если левую и правую части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то смысл неравенства изменится на противоположный.

6. Сложение неравенств. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$, то есть два неравенства одинакового смысла можно складывать почленно, в результате получается неравенство того же смысла.

7. Вычитание неравенств. Если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$, или, если $a < b$ и $c > d$, то $a - c < b - d$, то есть два неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, в результате получается неравенство такого же смысла, как неравенство – уменьшаемое.

8. Умножение неравенств. Если a, b, c, d - положительные числа, $a > b$ и $c > d$, то $a \cdot c > b \cdot d$, то есть два неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно умножать, в результате получается неравенство того же смысла.

9. Если $a > b$, где a и b - положительные числа, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

10. Деление неравенств. Если a, b, c, d - положительные числа, $a > b$ и $c < d$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$, то есть два неравенства противоположного смысла с положительными членами можно почленно делить, в результате получается неравенство такого же смысла, как неравенство – делимое.

11. Возведение неравенства в степень. Если $a > b$, где a и b - положительные числа, и n - натуральное число, то $a^n > b^n$, то есть левую и правую части неравенства с положительными членами можно возводить в степень, в результате получается неравенство того же смысла.

12. Извлечение корня из неравенства. Если $a > b$, где a и b - положительные числа, и n - натуральное число, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, то есть из левой и правой частей неравенства с положительными членами можно извлекать корень, в результате получается неравенство того же смысла.

Два неравенства

$$f(x) > \varphi(x) \tag{16.1}$$

$$f_1(x) > \varphi_1(x) \tag{16.2}$$

называются **равносильными**, если множества их решений совпадают, то есть все решения неравенства (16.1) являются решениями неравенства (16.2) и, наоборот, все решения неравенства (16.2) являются решениями неравенства (16.1).

Например, неравенства $2x-1>3$ и $3x+1>x+5$ равносильны, потому что они имеют одинаковое множество решений $(2,+\infty)$.

Два неравенства, каждое из которых не имеет решения, также равносильны, потому что множество решений каждого неравенства есть пустое множество $\varnothing$.

Например, неравенства $x^2<-1$ и $2x^2+1<0$ равносильны.

Если к левой и правой частям неравенства

$$f(x)>\varphi(x)$$

прибавить одно и то же число или алгебраическое выражение $F(x)$, которое имеет смысл при всех допустимых значениях x данного неравенства, то получим неравенство

$$f(x)+F(x)>\varphi(x)+F(x),$$

равносильное данному неравенству.

Например, пусть нам дано неравенство $2x^2-3>1$. Прибавим к левой и правой частям неравенства число 7, получим неравенство $2x^2+4>8$, которое равносильно данному неравенству.

Пусть дано неравенство $3x<5$. Область допустимых значений (ОДЗ) данного неравенства – множество всех действительных чисел. Выражение $\frac{2}{1+x^2}$ имеет смысл при всех значениях x из ОДЗ. Прибавим к левой и правой частям неравенства это выражение, получим неравенство $3x+\frac{2}{1+x^2}<5+\frac{2}{1+x^2}$, равносильное данному неравенству.

Члены неравенства можно переносить из одной части неравенства в другую с противоположным знаком.

Например, неравенство $3x-8>2x+5$ равносильно неравенству $3x-2x>5+8$ или же $x>13$.

Если обе части неравенства

$$f(x)>\varphi(x)$$

умножить или разделить на одно и то же положительное число m $(m>0)$, то получим неравенство $mf(x)>m\varphi(x)$ или $\frac{f(x)}{m}>\frac{\varphi(x)}{m}$, равносильное данному неравенству.

Например, дано неравенство $2x-1<3+x$. Умножим левую и правую части неравенства на число 4, получим $4(2x-1)<4(3+x)$, или $8x-4<12+4x$. Это неравенство равносильно данному.

Если обе части неравенства

$$f(x)>\varphi(x)$$

умножить или разделить на одно и то же отрицательное число n $(n<0)$ и изменить знак неравенства на противоположный, то получим неравенство $n\,f(x)<n\,\varphi(x)$ или $\dfrac{f(x)}{n}<\dfrac{\varphi(x)}{n}$, равносильное данному неравенству.

Например, дано неравенство $2-3x<0$. Умножим обе части неравенства на (-1) и изменим знак неравенства на противоположный, получим $(2-3x)(-1)>0(-1)$ или $3x-2>0$. Это неравенство равносильно исходному.

16.3 Линейные неравенства

Неравенства вида

$$ax+b>0 \text{ или } ax+b<0,$$

где a и b – некоторые числа, x – переменная, называются **линейными**.

Решим линейное неравенство $ax+b>0$ в общем виде. Перенесем член b из левой части неравенства в правую с противоположным знаком, получим $ax>-b$. Найдем решения данного неравенства при различных значениях a и $-b$.

Пусть $a>0$. Разделим обе части неравенства $ax>-b$ на a, получим $x>-\dfrac{b}{a}$. Это неравенство показывает, что все значения x, которые больше, чем число $-\dfrac{b}{a}$, являются решениями данного неравенства. На числовой оси (рис. 16.1) все решения неравенства образуют множество точек, которые находятся справа от точки $-\dfrac{b}{a}$, то есть интервал $\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$.

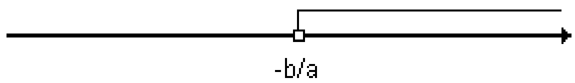


Рисунок 16.1

Пусть $a<0$. Разделим обе части неравенства $ax>-b$ на a и изменим знак неравенства на противоположный, получим $x<-\dfrac{b}{a}$. Это неравенство показывает, что все значения x, которые меньше, чем число $-\dfrac{b}{a}$ являются решениями данного неравенства. На числовой оси (рис. 16.2) все решения неравенства образуют множество точек, которые находятся слева от точки $-\dfrac{b}{a}$, то есть интервал $\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$.

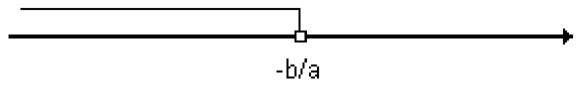


Рисунок 16.2

Если $a = 0$ и $-b < 0$, то неравенство $ax > -b$ принимает вид $0 \cdot x > -b$. Это тождественное неравенство, потому что при любом $x \in R$ левая часть неравенства равна нулю, а правая часть – отрицательное число ($0 > -b$ - верное неравенство). Следовательно, решением неравенства является множество всех действительных чисел R, или бесконечный интервал $x \in (-\infty; +\infty)$.

Если $a = 0$ и $-b > 0$, то получится неравенство $0 \cdot x > -b$. Левая часть полученного неравенства при всех $x \in R$ равна нулю, а правая часть – положительное число ($0 > -b$ - неверное неравенство). Следовательно, неравенство не имеет решений. Множество решений неравенства – пустое множество, т.е. $x \in \varnothing$.

Рассмотрим примеры решения неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $2x - 3 > x - 5$.

Перенесем член x влево со знаком «минус», а член (-3) вправо со знаком «плюс», получим:

$$2x - x > 3 - 5, \text{ или } x > -2.$$

Следовательно, множество всех чисел, которые больше, чем число -2, является решением данного неравенства (рис. 16.3):

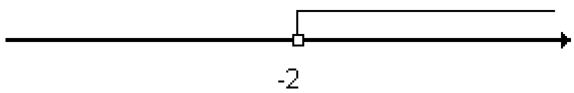


Рисунок 16.3

Например, значение $x = 4{,}5$ является решением неравенства. Проверим это. Подставим число 4,5 вместо x в данное неравенство, получим $2 \cdot 4{,}5 - 3 > 4{,}5 - 5$, или $9 - 3 > -0{,}5$, или $6 > -0{,}5$ – верное неравенство.

Ответ: $x \in (-2; +\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство $x + 2 > 3x - 4$.

Упростим неравенство: $x - 3x > -4 - 2$, или $-2x > -6$. Разделим обе части неравенства на -2 и изменим знак неравенства на противоположный, получим $\frac{-2x}{-2} < \frac{-6}{-2}$, или $x < 3$. Следовательно, множество всех чисел, которые меньше, чем 3, является решением данного неравенства (рис. 16.4).

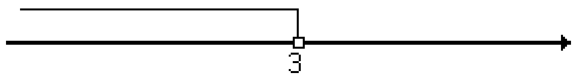


Рисунок 16.4

Ответ: $x \in (-\infty; 3)$.

Пример 3. Решить неравенство $\frac{2x+1}{3} - 1 < \frac{x+1}{2}$.

Упростим неравенство. Сначала освободимся от дробей. Умножим левую и правую части неравенства на общий знаменатель 6. Получим:

$$2(2x+1) - 6 < 3(x+1).$$

Раскроем скобки и приведём подобные члены:

$4x + 2 - 6 < 3x + 3$, или $4x - 4 < 3x + 3$, или $4x - 3x < 3 + 4$, или $x < 7$ (рис. 16.5).

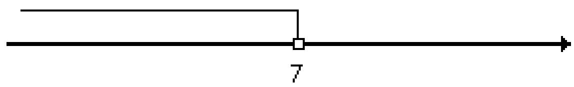


Рисунок 16.5

Ответ: $x \in (-\infty; 7)$.

Пример 4. Решить неравенство $(3x+1)(x-1) - 3x^2 > 5 - 2x$.

Упростим неравенство, получим:

$3x^2 - 3x + x - 1 - 3x^2 > 5 - 2x$, или $-2x - 1 > 5 - 2x$, или $-2x + 2x > 5 + 1$, или $0 \cdot x > 6$.

При всех значениях x левая часть неравенства $0 \cdot x > 6$ равна нулю, то есть не может быть больше шести. Следовательно, данное неравенство не имеет решения.

Ответ: $x \in \varnothing$.

16.4 Системы линейных неравенств

Системой линейных неравенств называются два или несколько линейных неравенств, которые содержат одну и ту же переменную величину.

Например, $\begin{cases} 2x - 1 > 3x + 5 \\ -7x < 9 \end{cases}$ – это система двух линейных неравенств,

$\begin{cases} 5x + 1 < 3 - 2x, \\ 3x > 2, \\ 7 > -5x + 8 \end{cases}$ – это система трёх линейных неравенств.

Решением системы линейных неравенств называется значение переменной, которое удовлетворяет каждому неравенству системы.

Например, значение $x = 2$ является решением системы

$$\begin{cases} 3x < 12, \\ x - 1 > 0. \end{cases}$$

Проверим это. Подставим значение $x = 2$ в каждое неравенство системы, получим:

$\begin{cases} 3 \cdot 2 < 12 \\ 2 - 1 > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 6 < 12 \\ 1 > 0 \end{cases}$ - верные неравенства.

Решить систему линейных неравенств – значит найти множество ее решений.

При решении системы сначала находят множества решений каждого неравенства системы, а затем находят общие для всех неравенств решения. То есть, **решение системы** –это пересечение множеств решений всех неравенств системы.

Решим систему двух линейных неравенств

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 > 0, \\ a_2 x + b_2 > 0 \end{cases}$$

в общем виде. Для этого нужно решить каждое неравенство системы и найти пересечение множеств их решений.

Пусть $a_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0$. Тогда при решении каждого неравенства системы нужно рассмотреть два случая.

Из первого неравенства $a_1 x + b_1 > 0$ получим $a_1 x > -b_1$, откуда: а) если $a_1 > 0$, то $x > -\dfrac{b_1}{a_1}$; б) если $a_1 < 0$, то $x < -\dfrac{b_1}{a_1}$.

Из второго неравенства $a_2 x + b_2 > 0$ получим $a_2 x > -b_2$, откуда: а) если $a_2 > 0$, то $x > -\dfrac{b_2}{a_2}$, б) если $a_2 < 0$, то $x < -\dfrac{b_2}{a_2}$.

Обозначим $-\dfrac{b_1}{a_1} = a,\ -\dfrac{b_2}{a_2} = b$. При различных значениях $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ могут получиться системы четырех различных видов. Решим эти системы.

1) $\begin{cases} x > a & \ldots &]a; +\infty[\\ x > b & \ldots &]b; +\infty[\end{cases}$ $\left(b > a \right)$

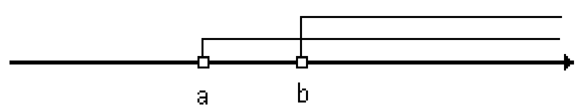


Рисунок 16.6

Значения $x > b$ – общие решения неравенств системы (рис. 16.6).

Решение системы: $\left]a;+\infty\right[\bigcap\left]b;+\infty\right[=\left]b;+\infty\right[$.

2) $\begin{cases} x<a & \ldots & \left]-\infty;a\right[\\ x<b & \ldots & \left]-\infty;b\right[\end{cases}$ $\left(b>a\right)$ (рис. 16.7).

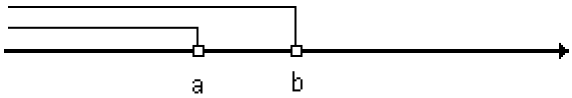


Рисунок 16.7

Значения $x<a$ – общие решения неравенств системы.
Решение системы: $\left]-\infty;a\right[\bigcap\left]-\infty;b\right[=\left]-\infty;a\right[$.

3) $\begin{cases} x>a & \ldots & \left]a;+\infty\right[\\ x<b & \ldots & \left]-\infty;b\right[\end{cases}$ $\left(b>a\right)$ (рис. 16.8).

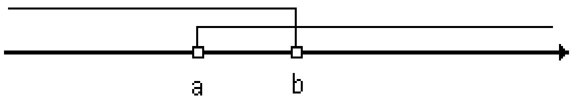


Рисунок 16.8

Значения $a<x<b$ – общие решения неравенств системы.
Решение системы: $\left]a;+\infty\right[\bigcap\left]-\infty;b\right[=\left]a;b\right[$.

4) $\begin{cases} x<a & \ldots & \left]-\infty;a\right[\\ x>b & \ldots & \left]b;+\infty\right[\end{cases}$ $\left(b>a\right)$ (рис. 16.9).

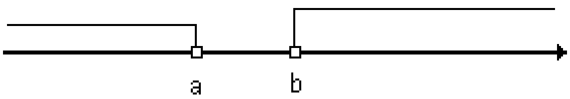


Рисунок 16.9

Неравенства системы не имеют общих решений.

Решение системы: $\left]-\infty;a\right[\bigcap\left]b;+\infty\right[=\varnothing$, то есть система не имеет решения.

Пример 1. Решить систему трёх линейных неравенств

$$\begin{cases} x-3>0, \\ 2x+1>0, \\ 4x-8<0. \end{cases}$$

Нужно решить каждое неравенство системы и найти пересечение множеств их решений:

$$x-3>0 \Rightarrow x>3 \Rightarrow x\in\left]3;+\infty\right[,$$

$$2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2} \Rightarrow x \in \left]-\frac{1}{2};\,+\infty\right[,$$

$$4x-8<0 \Rightarrow x<2 \Rightarrow x \in \left]-\infty;\,2\right[.$$

$$\left]3;\,+\infty\right[\cap \left]-\frac{1}{2};\,+\infty\right[\cap \left]-\infty;\,2\right[= \varnothing \text{ (рис. 16.10).}$$

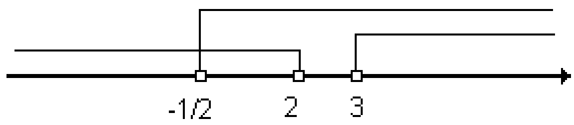


Рисунок 16.10

Система не имеет решений.

Рассмотрим примеры решения неравенств, которые содержат дробные члены.

Пример 2. Решить неравенство $\dfrac{x+2}{3x-1}>0$.

Возможны два случая: $\begin{cases} x+2>0, \\ 3x-1>0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x+2<0, \\ 3x-1<0. \end{cases}$

То есть данное неравенство равносильно совокупности двух систем. Решим первую систему:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ 3x-1>0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ 3x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x>\frac{1}{3}.$$

Интервал $\left]\dfrac{1}{3};\,+\infty\right[$ - решение системы.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} x+2<0 \\ 3x-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x<\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x<-2.$$

Интервал $\left]-\infty;\,-2\right[$ - решение системы.

Решения каждой системы являются решениями данного неравенства. Следовательно, решение данного неравенства – это объединение интервалов $\left]-\infty;\,-2\right[\cup \left]\dfrac{1}{3};\,+\infty\right[$.

Ответ: $x \in \left]-\infty;\,-2\right[\cup \left]\dfrac{1}{3};\,+\infty\right[$.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{x-1}{2x+3}<0$.

Дробь отрицательна, когда ее числитель и знаменатель имеют разные знаки:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 2x+3<0, \end{cases} \text{или} \begin{cases} x-1<0, \\ 2x+3>0, \end{cases}$$

то есть данное неравенство равносильно совокупности двух систем. Решим первую систему:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 2x+3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-1{,}5 \end{cases}$$

множество решений системы пусто: $x \in \varnothing$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} x-1<0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ x>-1{,}5 \end{cases} \Rightarrow -1{,}5<x<1.$$

Множество решений системы – интервал $\left]-1{,}5;\, 1\right[$.

Решение данного неравенства: $\varnothing \bigcup \left]-1{,}5;\, 1\right[= \left]-1{,}5;\, 1\right[$.

Ответ: $x \in \left]-1{,}5;\, 1\right[$.

Упражнения

159. Прочитайте выражения:

числовой промежуток – числовые промежутки;
закрытый числовой промежуток – отрезок;
открытый числовой промежуток – интервал;
полуоткрытый числовой промежуток
полуинтервал – полуинтервалы;
бесконечный промежуток, бесконечные промежутки;
бесконечный интервал, бесконечные интервалы;
пустое множество;
числовое неравенство – числовые неравенства;
равносильные неравенства;
линейное неравенство – линейные неравенства;
система линейных неравенств;
решение системы линейных неравенств.

160. Решите линейные неравенства:

а) $3-2x<12-5x$;　　　　б) $2x-3<7(1+x)$;

в) $3{,}5(x+1)>4x-\dfrac{x-1}{2}$;　　　　г) $\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+2}{3}<2+\dfrac{x}{6}$;

д) $\dfrac{3x+5}{4}-1\le\dfrac{x-2}{3}+x$;　　　　е) $\dfrac{37-3x}{2}+9<\dfrac{2x-7}{4}-2x$.

161. Решите линейные неравенства:

а) $\frac{5-x}{4}-9<\frac{2x-1}{3}$;

б) $8+\frac{3x-4}{5}>\frac{x+1}{6}-\frac{5x+3}{8}$;

в) $\frac{6-5x}{5}-\frac{3x-1}{2}<7-x$;

г) $\frac{1}{2}(3x-1)+\frac{x}{5}<7x+10{,}1$;

д) $4-\frac{3}{2}x>\frac{13}{8}-\frac{1}{6}(4x-3)$;

е) $3-\frac{3x}{2}>\frac{5}{8}-\frac{4x-3}{6}$.

162. Решите системы линейных неравенств:

а) $\begin{cases} 3x-5>23-4x, \\ 7x+3<9x-1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 10(x-1)+11>4x+5(x+1), \\ 3x-5<2(x-1); \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+1>3x+4, \\ 5x+3\ge 8x+21; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2(3x-4)<3(4x-3)+16, \\ 4(1+x)<3x+5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x-2\ge 2x+1, \\ 2x+3<18-3x; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x>2-\frac{2x-13}{11}, \\ \frac{x}{6}+\frac{2}{3}(x-7)<\frac{3x-20}{9}; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x-1>2x-3, \\ 4x+5>x+17; \end{cases}$

з) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}\ge\frac{x-3}{4}-x, \\ 1-0{,}5x>x-4; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 3x+7>7x-9, \\ x-3>-3x+1; \end{cases}$

к) $\begin{cases} 6x-7>5x-1, \\ 3x+6>8x-4. \end{cases}$

163. Решить системы неравенств:

а) $\begin{cases} 2-\frac{5+x}{7}<1-\frac{9-x}{14}, \\ 12-\frac{1}{3}\left(47-\frac{60}{x}\right)>3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \frac{7-x}{2}-3\le\frac{3+x}{5}-4, \\ \frac{5}{3}x+5(3-2x)<12-5x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2<\frac{2x-8}{6}-\frac{18-4x}{3}, \\ 9-\left(\frac{x-2}{4}+\frac{2}{3}\right)>x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x-\frac{x-1}{8}>x, \\ x-1<3-\frac{x+1}{2}; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \frac{2x-11}{4}+\frac{19-2x}{2}<2x, \\ \frac{2x+15}{9}>\frac{1}{5}(x-1)+\frac{x}{3}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 1-\frac{3x-88}{7}>5x, \\ 4x+5-\frac{1}{6}\left(25x+29\frac{1}{2}\right)<0; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}-\dfrac{2x+3}{3}+\dfrac{x}{6}<2-\dfrac{x+5}{2}, \\ 1-\dfrac{x+5}{8}+\dfrac{4-x}{2}<3x-\dfrac{x+1}{4}; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{13-x}{2}>\dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+3)}{6}, \\ \dfrac{2x+7}{3}<\dfrac{3x+5}{7}+8+\dfrac{10-3x}{5}. \end{cases}$

164. Ответьте на вопросы:

а) Что такое неравенство? Приведите пример.
б) Какие неравенства называются строгими? Приведите пример.
в) Какие неравенства называются нестрогими? Приведите пример.
г) Какие неравенства называются равносильными? Приведите пример.
д) Какие неравенства называются линейными? Приведите пример.
е) Что такое система линейных неравенств? Приведите пример.

ЗАНЯТИЕ 17

17.1 Квадратные неравенства

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Квадратное неравенство	Square inequality	Inégalité carrée
Квадратный трёхчлен	Square three-member	Carré à trois membres
Квадратичная функция	Quadratic function	Fonction quadratique
Парабола	Parabola	Parabole
Ветви параболы	Parabola branches	Branches de parabole

Квадратное неравенство это неравенства вида

$$ax^2+bx+c\geq 0,$$

где $a\neq 0$, a, b, c – числа, x – переменная. Знак неравенства может быть >, <, $\geq$, $\leq$.

При решении квадратных неравенств удобно применять формулу

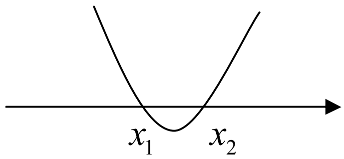
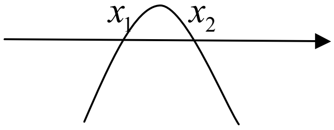
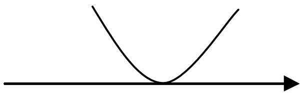
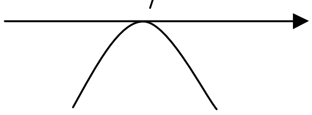
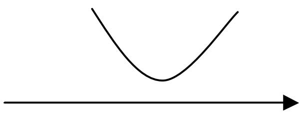
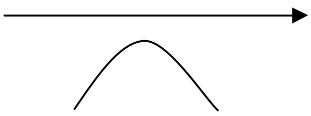
$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$$

разложения квадратного трёхчлена на множители.

Графиком квадратичной функции является **парабола.**

Рассмотрим в общем виде решение квадратного неравенства (табл. 17.1):

Таблица 17.1 – Решение квадратных неравенств

D	a	График	Вид неравенства	Решение
$D>0$	$a>0$	 x_1 x_2 ветви вверх	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\ge 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\le 0$	1) $x<x_1, x>x_2$; 2) $x\le x_1$, $x\ge x_2$; 3) $x_1<x<x_2$; 4) $x_1\le x\le x_2$
	$a<0$	x_1 x_2  ветви вниз	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\ge 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\le 0$	1) $x_1<x<x_2$; 2) $x_1\le x\le x_2$; 3) $x<x_1, x>x_2$; 4) $x\le x_1$, $x\ge x_2$
$D=0$	$a>0$	 $x=-b/2a$ ветви вверх	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\ge 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\le 0$	1) $x\in R,\ x\ne {-b}/{2a}$; 2) $x\in R$; 3) $x\in\varnothing$; 4) $x=-b/2a$
$D=0$	$a<0$	$x=-b/2a$  ветви вниз	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\ge 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\le 0$	1) $x\in\varnothing$; 2) $x=-b/2a$; 3) $x\in R,\ x\ne {-b}/{2a}$ 4) $x\in R$
$D<0$	$a>0$	 ветви вверх	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\ge 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\le 0$	1) $x\in R$; 2) $x\in R$; 3) $x\in\varnothing$; 4) $x\in\varnothing$
	$a<0$	 ветви вниз	1) $ax^2+bx+c>0$; 2) $ax^2+bx+c\ge 0$; 3) $ax^2+bx+c<0$; 4) $ax^2+bx+c\le 0$	1) $x\in\varnothing$; 2) $x\in\varnothing$; 3) $x\in R$; 4) $x\in R$

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решим квадратное неравенство $4x^2-4x-15\le 0$.

Вычислим дискриминант

$$D=16+240=256=16^2>0,$$

поэтому $x_1=-1{,}5$; $x_2=2{,}5$. Так как $a=4>0$ и $D=256>0$, то имеем случай $x_1\le x\le x_2$, значит $-1{,}5\le x\le 2{,}5$ или $x\in[-1{,}5\ ;\ 2{,}5]$.

Ответ: $x\in[-1{,}5\ ;\ 2{,}5]$.

Пример 2. Решим квадратное неравенство $x^2-4>4-2x$.

Выполним тождественные преобразования:

$$x^2-4>4-2x;\ x^2+2x-8>0.$$

Вычислим дискриминант

$$D = 4 + 32 = 36 = 6^2 > 0,$$

поэтому $x_1 = -4$; $x_2 = 2$. Так как $a = 1 > 0$ и $D = 36 > 0$, то имеем случай $x < x_1, x > x_2$, значит $x < -4, x > 2$ или $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$

Пример 3. Решим квадратное неравенство $2x^2 - 3x + 4 < 0$.

Вычислим дискриминант

$$D = 9 - 32 = -23 < 0,$$

поэтому квадратный трёхчлен действительных корней не имеет. Так как $a = 2 > 0$ и $D = -23 < 0$, то имеем случай $x \in \varnothing$.

Ответ: $x \in \varnothing$

17.2 Рациональные неравенства

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Рациональные неравенства	Rational inequalities	Inégalités rationnelles
Нуль функции	Function zero	Fonction zéro
Корень многочлена	Root of polynomial	Racine de polynôme
Критические точки	Critical points	Points critiques
Метод интервалов	Spacing method	Méthode d'espacement

Рациональным неравенством называется неравенство вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \geq 0, \text{ (или } >, <, \leq),$$

где $Q_m(x) \neq 0$, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены.

Число a называется **нулём функции** $y = P_n(x)$ или **корнем многочлена** $P_n(x)$, если $P_n(a) = 0$.

Например, многочлен $P_2(x) = 6 - 5x + x^2$ имеет два нуля $x = 2$ и $x = 3$, так как $P_2(2) = 0$ и $P_2(3) = 0$. Многочлен может вообще не иметь нулей: например, $P_0(x) = 1$ или $P_2(x) = 1 + x^2$. Известно, что число нулей многочлена не превышает его степени.

Нули многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ будем называть **критическими значениями** переменной или **критическими точками** рациональной функции

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$

Например, для функции
$$y=\frac{P_3(x)}{Q_2(x)}=\frac{x^3-6x^2-x+6}{x^2+3x+2}=\frac{(x-1)(x+1)(x-6)}{(x+1)(x+2)}$$
критическими значениями переменной являются
$$x=-2,\ \ x=-1,\ \ x=1,\ \ x=6.$$

Чтобы решить рациональное неравенство, применяют **метод интервалов**. Он основан на следующем свойстве рациональной функции: в интервале между двумя своими соседними критическими точками рациональная функция сохраняет знак.

Метод интервалов состоит в следующем:

– рациональное неравенство приводят к стандартному виду:

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0$ или $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0$ (в случае строгого неравенства),

$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ge 0$ или $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\le 0$ (в случае нестрогого неравенства);

– затем находят все критические точки рациональной функции;

– критические точки отмечают на числовой оси. Числовая ось разбивается критическими точками на конечное число интервалов, на каждом из которых левая часть неравенства сохраняет знак. Чтобы определить знак левой части на всем интервале, достаточно определить знак $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в одной какой-либо точке этого интервала и тем самым установить, входит ли этот интервал в множество решений данного неравенства.

Сами критические точки в случае строгого неравенства не входят в множество решений; а в случае нестрогого неравенства – входят, если не являются нулями многочлена $Q_m(x)$.

Пример 1. Решить неравенство
$$\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^2-4x}>0.$$

Найдем нули числителя:
$$x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)-(x-3)=(x-3)(x-1)(x+1).$$

Следовательно, нули числителя $x=-1,\ x=1,\ x=3$, а нули знаменателя $x=0,\ x=4$.

Неравенство можно записать теперь следующим образом:
$$\frac{(x-3)(x-1)(x+1)}{x(x-4)}>0.$$

Критические точки рациональной функции есть
$$x=-1,\ x=0,\ x=1,\ x=3,\ x=4.$$

Числовая ось разбивается этими точками на шесть интервалов. Отметим точки на числовой оси. Найдём знак функции на каждом интервале (рис. 17.1). Так как неравенство строгое, сами критические точки не являются решениями.

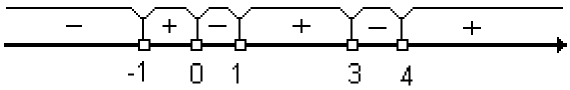


Рисунок 17.1

Ответ: $x \in (-1\,;0) \cup (1\,;3) \cup (4\,;+\infty)$.

Некоторые алгебраические выражения степеней более высоких, чем 2, приводят к виду

$$P_n(x) = (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \,. \,. \,. \,(x - a_n)^{k_n}.$$

Неравенства, многочлены которых представлены подобным образом, решаются с помощью **обобщённого метода интервалов**. На числовую ось наносят числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В промежутке справа от наибольшего из этих чисел, т. е. справа от a_n, ставят знак плюс. В следующем промежутке (читая справа налево) ставят знак плюс, если k_n – чётное число, и знак минус, если k_n - нечётное число. В следующем за ним промежутке ставят знак согласно правилу: многочлен $P(x)$ при переходе через точку a_{n-1} меняет знак, если k_{n-1} - нечётное число; и многочлен $P(x)$ при переходе через точку a_{n-1} не меняет знак, если k_{n-1} - чётное число. Затем рассматривают следующий промежуток, и в нем ставят знак, пользуясь тем же правилом. Таким образом, рассматривают все промежутки.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x^2 - 3x + 2)(x^3 - 3x^2)(4 - x^2) \le 0.$$

Поскольку

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1), \qquad x^3 - 3x^2 = x^2(x-3), \qquad 4 - x^2 = -(x-2)(x+2)$$

то данное неравенство равносильно неравенству

$$-(x+2)x^2(x-1)(x-2)^2(x-3) \le 0 \text{ или } (x+2)x^2(x-1)(x-2)^2(x-3) \ge 0$$

Используя обобщенный метод интервалов (рис. 17.2), получаем решение неравенства $x \in [-2\,;1] \cup \{2\} \cup [3\,;+\infty)$.

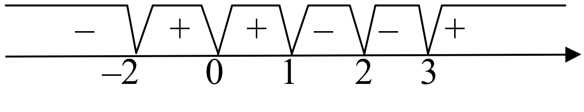


Рисунок 17.2

Ответ: $x \in [-2\,;1] \cup \{2\} \cup [3\,;+\infty)$.

Упражнения

165. Прочитайте выражения:

квадратное неравенство – квадратные неравенства;
квадратный трёхчлен; квадратичная функция;
парабола; ветви параболы;
рациональное неравенство – рациональные неравенства;
нуль функции – нули функции;
корень многочлена;
критические точки функции;
метод интервалов – обобщенный метод интервалов.

166. Решите квадратные неравенства:

а) $x^2 - 16 < 0$;
б) $3x^2 + 2x - 1 > 0$;
в) $-x^2 - x + 2 > 0$;
г) $x^2 + 1 > 0$;
д) $x^2 + x + 3 \le 0$;
е) $x^2 + 2x + 1 \le 0$;
ж) $-4x^2 + 12x - 9 > 0$;
з) $3x^2 + 2 > 0$.

167. Решите рациональные неравенства:

а) $(x+1)^2(x-2) > 0$;
б) $(x-1)(x+2) > x+2$;
в) $x^3(3-x) > 0$;
г) $(x+4)(x+6) < 6(x+6)$;
д) $(x-4)^4(1-3x) < 0$;
е) $(2x+3)(3x-2)(x^2+2) < 0$;
ж) $(1-x)^5(6-x) < 0$;
з) $(x-8)(8-5x)(x-2)^2 < 0$.

168. Решите дробно-рациональные неравенства:

а) $\dfrac{2x-5}{x-2} > 0$;
б) $\dfrac{x+1}{x+2} > 3$;
в) $\dfrac{x+3}{7-x} < 0$;
г) $\dfrac{4-3x}{3-2x} < 1$;
д) $\dfrac{3-0{,}5x}{4-\frac{2}{3}x} > 0$;
е) $\dfrac{9x}{10+x} > 4$;
ж) $\dfrac{7x+4}{5(x+1)} < 0$;
з) $\dfrac{5-x}{x-6} < \dfrac{2}{3}$.

169. Решите дробно-рациональные неравенства:

а) $(3x^2 - 13x + 4)(4x^2 + 12x + 9) < 0$;.
б) $\dfrac{8+4x}{4x+x^2} \le \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{4+x}$;
в) $(2x-5)(x^2-4)(x^3+8) \le 0$;
г) $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{2}{x+1} < \dfrac{3}{(x-2)^2}$;

д) $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-10x+20}<0$; е) $\dfrac{x+2}{x^3-x^2}<\dfrac{2x+1}{x^3+3x^2}$;

ж) $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7}<\dfrac{1}{x-3}$; з) $\dfrac{1}{x^2-4}-\dfrac{1}{(x+2)^2}\geq\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x}$;

и) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}\geq\dfrac{x+1}{x}$; к) $\dfrac{2}{x^2-x+1}-\dfrac{1}{x+1}\geq\dfrac{2x-1}{x^3+1}$.

Контрольные вопросы по теме «Рациональные неравенства»

1. Что такое неравенство? Приведите пример.
2. Какие неравенства называются строгими? Приведите пример.
3. Какие неравенства называются нестрогими? Приведите пример.
4. Какие неравенства называются равносильными? Приведите пример.
5. Что такое линейное неравенство? Приведите пример.
6. Что такое система линейных неравенств? Приведите пример.
7. Какие неравенства называются квадратными? Приведите пример.
8. Какие неравенства называются рациональными? Приведите пример. Каким методом решаются рациональные неравенства?

Модель контрольной работы по теме «Рациональные неравенства»

1. Решить линейное неравенство: $\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{4x+1}{5}\leq\dfrac{7-3x}{10}$.

2. Решить систему линейных неравенств: $\begin{cases}\dfrac{3+x}{4}\geq 1\\ \dfrac{1-2x}{6}<0\end{cases}$.

3. Решить квадратное неравенство: $-2x^2+9x+5\geq 0$.

4. Решить рациональные неравенства:

а) $(x-3)^3(x+1)^4x<0$;

б) $\dfrac{2x-5}{x-2}<8$;

в) $\dfrac{(x+1)x^2(x-1)^3}{(2x-5)(x-2)^6}\geq 0$.

5. Какие неравенства называются нестрогими? Приведите пример.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

ЗАНЯТИЕ 18

18.1 Уравнения с модулями

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Модуль	Module	Module
Абсолютная величина	Absolute value	Valeur absolue
Уравнение с модулем	Equation with module	Équation avec module
Иррациональное уравнение	Irrational equation	Équation irrationnelle

Модулем (абсолютной величиной) $|a|$ действительного числа a называется

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a \prec 0. \end{cases}$$

Читаем выражение с модулем так:

$|a|$ – «модуль числа (выражения) a» или «число (выражение) a по модулю». Например, $|x-2|$ «модуль выражения икс минус два» или «выражение икс минус два по модулю».

Модуль положительного числа равен тому же числу, например $|89| = 89$. Модуль отрицательного числа равен числу ему противоположному, например $|-89| = 89$.

Уравнение, которое содержит под знаком модуля переменную, называют **уравнением с модулем**.

Например, $x - |2+x| = 3 + |x|$ это уравнение с модулем.

При решении уравнений с модулями применяется **метод промежутков**. Он состоит в следующем:

– приравниваем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля;

– полученные значения буквенных величин откладываем в области определения данного выражения;

– исследуем алгебраическое выражение в каждом из полученных промежутков.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение

$$|x-2| + |x-3| + |2x-8| = 9.$$

Приравняем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, получим точки $x = 2,\ x = 3,\ x = 4$ (ОДЗ уравнения – вся числовая ось).

Рассмотрим первый из полученных интервалов $x \le 2$. Здесь модули раскрываются со следующими знаками $|x-2| = -(x-2)$, $|x-3| = -(x-3)$, $|2x-8| = -(2x-8)$ и, следовательно,

$$-(x-2+x-3+2x-8)=9 \quad \Leftrightarrow \quad 4x=4 \quad \Leftrightarrow \quad x=1,$$

найденное значение x удовлетворяет условию $x \le 2$ и является корнем уравнения.

Рассмотрим второй интервал $2 < x \le 3$. После аналогичных преобразований $|x-2| = (x-2)$, $|x-3| = -(x-3)$, $|2x-8| = -(2x-8)$ получим

$$x-2-x+3-2x+8=9 \quad \Leftrightarrow \quad x=0.$$

Этот корень не принадлежит данному промежутку, и, следовательно, не является решением уравнения.

Рассмотрим третий интервал: $3 < x \le 4$. Делая аналогичные преобразования $|x-2| = (x-2)$, $|x-3| = (x-3)$, $|2x-8| = -(2x-8)$ получаем

$$x-2+x-3-2x+8=9 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \varnothing.$$

На четвёртом интервале $x > 4$. Тогда $|x-2| = (x-2)$, $|x-3| = (x-3)$, $|2x-8| = (2x-8)$ и уравнение принимает вид

$$x-2+x-3+2x-8=9 \quad \Leftrightarrow \quad 4x=22 \quad \Leftrightarrow \quad x=5{,}5.$$

Найденное значение $x \in (4;+\infty)$ и является корнем уравнения.

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 5{,}5$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Решение: Сделаем замену $\sqrt{x-1} = y \quad \Rightarrow \quad x = y^2+1$. Получаем

$$\sqrt{y^2+4-4y} + \sqrt{y^2+9-6y} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |y-2| + |y-3| = 1.$$

Таким образом, иррациональное уравнение после преобразования превратилось в уравнение с модулями. Поскольку $y \ge 0$, рассмотрим уравнение в следующих промежутках:

$0 \le y \le 2$, тогда

$$|y-2| = -(y-2),\ |y-3| = -(y-3),$$

и, следовательно,

$$-y+2-y+3=1 \quad \Leftrightarrow \quad y=2;$$

$2 < y \le 3$, тогда $|y-2| = (y-2)$, $|y-3| = -(y-3)$,

$$y-2+3-y=1 \quad \Leftrightarrow \quad 1=1;$$

уравнение обратилось в тождество, следовательно, все точки отрезка $[2;3]$ являются решениями;

$y \ge 3$, тогда

$$|y-2| = (y-2),\ |y-3| = (y-3)$$

и уравнение запишем в виде

$$y-2+y-3=1 \quad \Leftrightarrow \quad y=3.$$

Таким образом, решение уравнения можно записать в виде

$$2 \le y \le 3 \quad \Rightarrow \quad 2 \le \sqrt{x-1} \le 3 \quad \Rightarrow \quad 4 \le x-1 \le 9 \quad \Rightarrow \quad 5 \le x \le 10.$$

Ответ: $x \in \left[\, 5;\, 10 \,\right]$.

18.2 Иррациональные уравнения

Уравнения, содержащие неизвестное под знаком корня, называются **иррациональными уравнениями.** При решении иррациональных уравнений целесообразно использовать следующие теоремы:

Теорема 1. В области действительных чисел

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f^{2n+1}(x)=g^{2n+1}(x).$$

Если же показатель степени чётный, то приходится налагать дополнительные условия.

Теорема 2. Если $f(x) \ge 0$ и $g(x) \ge 0$, то в области действительных чисел

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f^{2n}(x)=g^{2n}(x).$$

Заметим, что в общем случае

$$f(x)=g(x) \;\; \Leftrightarrow \;\; f^{n}(x)=g^{n}(x).$$

Кроме того, при решении иррациональных уравнений нужно выполнить предварительное исследование области допустимых значений (ОДЗ) неизвестных.

Пример 1. Решить уравнение:

$$\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{1-x}=0.$$

Область определения левой части находим из условий

$$\begin{cases} x-2 \ge 0; \\ 1-x \ge 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2; \\ x \le 1. \end{cases}$$

Как видим, это пустое множество. Поэтому ОДЗ уравнения также пустое множество, следовательно, решений нет.

Пример 2. Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2-4x+4}=1-2x.$$

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении

$$\sqrt{(x-2)^2}=1-2x;$$

полученное уравнение эквивалентно следующему

$$\left| x-2 \right| = 1-2x,$$

а так как модуль неотрицателен, то и $1-2x \ge 0$, откуда $x \le \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, $x-2<0$ и модуль раскрывается со знаком минус. Следовательно, уравнение эквивалентно уравнению

$$-(x-2)=1-2x,$$

откуда имеем $x = -1$.

Пример 3. Решить уравнение:

$$\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{2x - 6}.$$

Эквивалентным данному уравнению является уравнение

$$\left(\sqrt{x^2 - 3x}\right)^2 = \left(\sqrt{2x - 6}\right)^2,$$

однако уравнение

$$x^2 - 3x = 2x - 6$$

будет лишь следствием предыдущего, ибо преобразование типа $\left(\sqrt{f}\right)^2 = f$ не является тождественным (оно расширяет ОДЗ). Поэтому, решив последнее уравнение $(x_1 = 2,\ x_2 = 3)$, надо сделать проверку (исходному уравнению удовлетворяет только $x = 3$). Заметим, что преобразование $\left(\sqrt{f}\right)^2 = f$ тождественно при дополнительном условии $f \ge 0$. Это дает возможность провести решение без проверки.

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 2x - 6; \\ x^2 - 3x \ge 0; \\ 2x - 6 \ge 0, \end{cases}$$

а эта система эквивалентна системе

$$\begin{cases} x^2 - 3x = 2x - 6; \\ x \ge 3 \end{cases}$$

(мы нашли решение системы двух неравенств). Решением полученной системы является $x = 3$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{2x - 6} + \sqrt{x + 4} = 5.$$

Обособляя корень, получаем уравнение, эквивалентное данному:

$$\sqrt{2x - 6} = 5 - \sqrt{x + 4}.$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 2x - 6 = 25 - 10\sqrt{x + 4} + x + 4; \\ 5 - \sqrt{x + 4} \ge 0; \\ 2x - 6 \ge 0; \quad x + 4 \ge 0. \end{cases}$$

Решив систему нестрогих неравенств, получим

$$\begin{cases} 10\sqrt{x + 4} = 35 - x; \\ 3 \le x \le 21. \end{cases}$$

Перейдем еще к одной системе, эквивалентной исходному утверждению:

$$\begin{cases}100(x+4)=(35-x)^2;\\ \quad 3\le x\le 21;\\ \quad 35-x\ge 0.\end{cases}$$

Уравнение, входящее в данную систему, имеет корни $x_1=5,\ x_2=165$. Системе удовлетворяет только $x=5$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{3}{2}.$$

Найдем ОДЗ данного уравнения из системы неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}\ge 0;\\ x+1\ne 0;\\ x-1\ne 0.\end{cases}$$

Решив данную систему, получаем допустимые значения переменной $x\in\left]-\infty;-1\right[\bigcup\left]1;+\infty\right[$. Пусть $y=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$. Тогда $y-\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}$, откуда $y_1=2,\ y_2=-\dfrac{1}{2}$. Очевидно, $y_2=-\dfrac{1}{2}$ не подходит, так как $y>0$. Поэтому следствием данного уравнения является уравнение $\dfrac{x+1}{x-1}=4$, из которого $x=\dfrac{5}{3}$. Данное значение x удовлетворяет ОДЗ, и, следовательно, является решением исходного уравнения.

Упражнения

170. Прочитайте выражения:

модуль – модули;
абсолютная величина – абсолютные величины;
модуль положительного числа;
модуль отрицательного числа;
уравнение с модулем – уравнения с модулями;
иррациональное уравнение – иррациональные уравнения;
модуль положительного числа равен данному числу;
модуль отрицательного числа равен числу, противоположному данному.

171. Решите уравнения с модулями:

а) $|2x-3|+|2x+3|=14$; б) $|1-2x|+|3x+2|+|x|=5$;
в) $|x+3|+|x-5|=3x-4$; г) $|2x-3|+|2x+3|=6-x$;
д) $|2x-1|+|3x+2|+|x|=3;$; е) $|3-2x|=|2+x|-3$;

ж) $\left||x|-2\right|=1$; з) $\left||x|-1\right|=4+x$;

и) $\left|x^2-2x-3\right|=\left|2x-5\right|+1$; к) $x+1+\left|x^2-x-3\right|=0$.

172. Решите иррациональные уравнения:

а) $\sqrt{x^2-7}=\sqrt{2}$; б) $3x^2+2\sqrt{x^2+5x+1}=2-15x$;

в) $\sqrt{6-x}=x$; г) $3x-\sqrt{18x+1}+1=0$;

д) $x-\sqrt{x-1}=3$; е) $\sqrt{x}-\sqrt{x-3}=1$;

ж) $1+\sqrt{2x+7}=x-3$; з) $\sqrt{21+x}=\sqrt{20-4x}+\sqrt{5+3x}$;

и) $\sqrt{2x^2-x-2}=x$; к) $x-1=\sqrt{2x^2-3x-5}$.

173. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}=6$; б) $\sqrt[3]{x^2+15}=2\sqrt[3]{x+1}$;

в) $\sqrt{x}\sqrt{1-x}=x$; г) $\sqrt[3]{x^3-2x-3}=x-1$;

д) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1}$; е) $\sqrt{7+\sqrt[3]{x^2+7}}=3$;

ж) $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-7}}=\sqrt{x-4}$; з) $\sqrt[3]{25+\sqrt{x^2+3}}=3$;

и) $\dfrac{2x+3}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{6x+1}$; к) $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x-6}$.

174. Решите уравнения:

а) $x-\sqrt{x}-6=0$; б) $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12$;

в) $7\sqrt{x}-2x+15=0$; г) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$;

д) $x+\sqrt{x-1}-3=0$; е) $x^2-4x-3\sqrt{x^2-4x+20}+10=0$;

ж) $3x-10\sqrt{x+1}+6=0$; з) $x^2+2\sqrt{x^2-3x+11}=3x+4$;

и) $5x^2+35x+2\sqrt{x^2+7x+1}=46$; к) $\sqrt{2x^2-3x+7}+\sqrt{2x^2-3x+2}=5$.

175. Решите уравнения:

а) $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}=22\sqrt[15]{x^7}$; б) $\sqrt[3]{5x+7}=1+\sqrt[3]{5x-12}$;

в) $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2$; г) $\sqrt{4x+5}+\sqrt{10x+6}=\sqrt{24x+25}$;

д) $x^{\frac{4}{5}}-7x^{-\frac{2}{5}}+6x^{-1}=0$; е) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{x-1}$;

ж) $\sqrt{20+x}+\sqrt{20-x}=\sqrt{6x}$; з) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$;

и) $\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2$; к) $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1$.

176. Ответьте на вопросы:

а) Что называют модулем?
б) Чему равен модуль положительного числа?
в) Чему равен модуль отрицательного числа?

г) Что такое уравнение с модулем? Приведите пример.

д) Какие уравнения называются иррациональными? Приведите пример.

е) Является ли уравнение $|2x-3|+|2x+3|=14$ уравнением с модулями? Если да, то почему, если нет, то тоже почему?

ж) Является ли уравнение $|2x-3|+|2x+3|=14$ иррациональным уравнением? Если да, то почему, если нет, то тоже почему?

з) Является ли уравнение $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$ иррациональным уравнением? Если да, то почему, если нет, то тоже почему?

ЗАНЯТИЕ 19

19.1 Неравенства с модулями

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Неравенство с модулем	Inequality with the module	Inégalité avec le module
Иррациональное неравенство	Irrational inequality	Inégalité irrationnelle

Неравенством с модулем называют неравенство, которое содержит переменную под знаком модуля. Например, $x+|7x+4|\geq 1$.

Для решения неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, надо разбить числовую ось на отдельные промежутки так, чтобы на каждом из них можно было записать неравенство, не используя знака абсолютной величины.

Пример 1. Решить неравенство

$$x^2-|5x+6|>0.$$

Всю числовую ось разобьем на два промежутка $\left]-\infty;\,-{}^6\!/_5\right[$ и $\left[-{}^6\!/_5;\,+\infty\right[$. На каждом из этих промежутков неравенство может быть записано без знака модуля.

Для первого промежутка $\left]-\infty;-{}^6\!/_5\right[$ верно равенство $|5x+6|=-(5x+6)$, и, следовательно, неравенство принимает вид

$$x^2+5x+6>0 \text{ или } (x+3)(x+2)>0,$$

откуда $x\in\left]-\infty;\,-3\right[\bigcup\left]-2;\,+\infty\right[$. Учитывая, что переменная принадлежит промежутку $\left]-\infty;\,-{}^6\!/_5\right[$, получаем решение исходного неравенства: $x\in\left]-\infty;\,-3\right[\bigcup\left]-2;\,-{}^6\!/_5\right[$.

На втором промежутке $\left[-\frac{6}{5};+\infty\right[$ справедливо равенство $|5x+6|=5x+6$, и, следовательно, неравенство записывается так:

$$x^2-5x-6>0, \qquad (x+1)(x-6)>0,$$

откуда $x\in\left]-\infty;-1\right[\bigcup\left]6;+\infty\right[$. Учитывая, что переменная принадлежит промежутку $\left[-\frac{6}{5};+\infty\right[$, получаем множество решений неравенства: $x\in\left[-\frac{6}{5};-1\right[\bigcup\left]6;+\infty\right[$.

Ответ: $x\in\left]-\infty;-3\right[\bigcup\left]-2;-1\right[\bigcup\left]6;+\infty\right[$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{|2x-1|}{x^2-x-2}>\frac{1}{2}.$$

Разобьем числовую ось на два интервала. На интервале $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$, $|2x-1|=2x-1$, следовательно, неравенство можно записать в виде

$$\frac{2x-1}{x^2-x-2}>\frac{1}{2}.$$

Это рациональное неравенство. Приводим его к стандартному виду

$$\frac{x(5-x)}{(x+1)(x-2)}>0.$$

Применяя метод интервалов, получаем $x\in\left]-1;0\right[\bigcup\left]2;5\right[$. Ограничение $x\geq\frac{1}{2}$ оставляет лишь интервал $\left]2;5\right[$.

Если $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, $|2x-1|=-(2x-1)$, то неравенство принимает вид

$$\frac{-2x+1}{x^2-x-2}>\frac{1}{2}.$$

Приводим неравенство к стандартному виду

$$\frac{(1-x)(x+4)}{(x+1)(x-1)}>0.$$

Применяя метод интервалов, получаем $x\in\left]-4;-1\right[\bigcup\left]1;2\right[$. Ограничение $x<\frac{1}{2}$ позволяет оставить лишь интервал $\left]-4;-1\right[$.

Ответ: $x\in\left]-4;-1\right[\bigcup\left]2;5\right[$.

Пример 3. Решить неравенство

$$|x-1|+|x+1|<4.$$

Разобьем числовую ось на три интервала.

На интервале $\left]-\infty;-1\right[$ имеем $|x-1|=-(x-1)$, $|x+1|=-(x+1)$ и, следовательно, на этом интервале неравенство равносильно линейному неравенству $-2x<4$, которое справедливо при $x>-2$. Таким образом, в множество решений входит интервал $\left]-2;-1\right[$.

На интервале $[-1;1[$ имеем $|x-1|=(x-1)$, $|x+1|=-(x+1)$. Здесь исходное неравенство равносильно верному числовому неравенству $2<4$. Поэтому все значения переменной, принадлежащие этому отрезку, входят в множество решений.

На интервале $[1;+\infty[$, $|x-1|=x-1$, $|x+1|=x+1$ и получается линейное неравенство $2x<4$, справедливое при $x<2$. Поэтому промежуток $[1;2[$ входит в множество решений.

Объединяя полученные результаты, делаем вывод, что неравенству удовлетворяют все значения переменной из интервала $]-2;2[$.

Тот же результат можно получить из наглядных и в то же время строгих геометрических соображений. На рисунке 19.1 построены графики функций

$$y=f(x)=|x-1|+|x+1|; \qquad y=4.$$

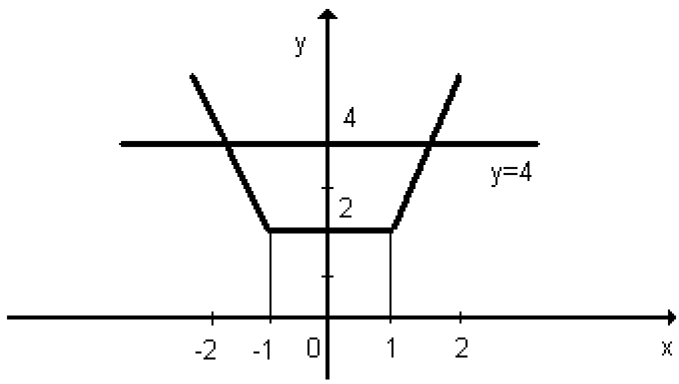


Рисунок 19.1

На интервале график функции $y=f(x)$ расположен под графиком функции $y=4$, а это и означает, что неравенство $f(x)<4$ справедливо.

Ответ: $x\in]-2;2[$.

19.2 Иррациональные неравенства

Иррациональными неравенствами называются неравенства, содержащие переменную под знаком корня (радикала). Обычный способ решения таких неравенств заключается в сведении их к рациональным неравенствам. Освободиться от радикалов иногда удается путем возведения обеих частей неравенства в степень. К сожалению, эта операция часто приводит к неравенству, не равносильному исходному. Поэтому при решении иррациональных неравенств рекомендуется проявлять максимальную осторожность. Прежде всего, следует ограничиться рассмотрением только тех значений переменной, при которых обе части неравенства имеют смысл. Рассмотрим типичный пример.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-4x+3} \geq 2-x.$$

Нередко приводится такое рассуждение: «при решении иррациональных уравнений и неравенств, необходимо прежде всего избавиться от корня, поэтому возведем в квадрат обе части неравенства, т. е. напишем

$$x^2-4x+3 \geq 4-4x+x^2,$$

но отсюда следует, что $3 \geq 4$, что неверно; значит, предложенное неравенство решений не имеет».

Правдоподобен ли полученный результат?

В данном случае достаточно внимательно посмотреть на неравенство, чтобы увидеть, что полученный результат не только неправдоподобен, но просто неверен. При $x=5$, например, левая часть неравенства положительна, тогда как правая отрицательна. Таким образом, неравенство имеет решения и, следовательно, приведенное рассуждение неверно.

Дадим правильное решение примера.

Очевидно, следует рассмотреть только те значения x, при которых $x^2-4x+3 \geq 0$. Нули многочлена есть $x_1=1,\ x_2=3$. Следовательно, множество решений неравенства $x^2-4x+3 \geq 0$ это $x \in \left]-\infty;\, 1\right] \cup \left[\,3;\, +\infty\right[$. Ясно, что на интервале $\left]1;\, 3\right[$ нет решений, так как левая часть неравенства при любом x из этого интервала не имеет смысла.

Заметим далее, что $x^2-4x+3 \geq 0$ (радикал понимается в арифметическом смысле), и так как при любом $x \geq 3$ правая часть неравенства меньше нуля, то все $x \geq 3$ являются решениями.

Если же $x \leq 1$, то $2-x>0$ и, возведя обе части неравенства в квадрат, получим равносильное неравенство

$$x^2-4x+3 \geq 4-4x+x^2,$$

которое не имеет решений, так как неравенство $3 \geq 4$ ложно.

Ответ: $x \in \left[\,3;\, +\infty\right[$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} > \frac{3}{2}.$$

Необходимо найти ОДЗ данного неравенства. Левая часть неравенства имеет смысл тогда и только тогда, когда $1-4x^2 \geq 0$ и $x \neq 0$. Таким образом, ОДЗ $x \in \left[-\frac{1}{2};\, 0\right[\cup \left]0;\, \frac{1}{2}\right]$.

Если $-{}^{1}\!/_{2} \leq x < 0$, то левая часть неравенства отрицательна и, следовательно, решений на этом интервале нет.

Пусть $0 < x \leq {}^{1}\!/_{2}$, тогда, после преобразований получаем

$$\sqrt{1-4x^2} < 1-\frac{3}{2}x.$$

Обе части неравенства неотрицательны, тогда, возведя обе части в квадрат, получим равносильное неравенство

$$1-4x^2 < 1-3x+\frac{9}{4}x^2.$$

Последовательно упрощая это неравенство, получим

$$\frac{25}{4}x^2-3x>0, \qquad \frac{25}{4}x-3>0, \qquad x>\frac{12}{25}.$$

Учитывая ограничение $0<x\le\frac{1}{2}$, приходим к окончательному результату $\frac{12}{25}<x\le {}^1\!/_2$.

Ответ: $x\in\left(\frac{12}{25};\frac{1}{2}\right]$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-5}\ge\sqrt{5-2x}.$$

Найдем ОДЗ данного неравенства. Обе части неравенства имеют смысл только для тех значений, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 2x+1\ge 0, \\ 2x-5\ge 0, \\ 5-2x\ge 0. \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\ge -{}^1\!/_2, \\ x\ge {}^5\!/_2, \\ x\le {}^5\!/_2 \end{cases}$$

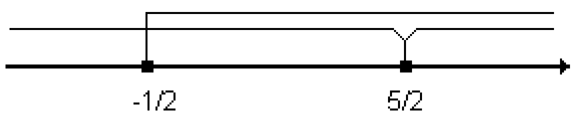


Рисунок 19.2

Мы видим (рис. 19.2), что эта система и исходное неравенство имеют только одно решение $x={}^5\!/_2$. Ответ: $\{2{,}5\}$.

Упражнения

177. Прочитайте выражения:

модуль – модули;
абсолютная величина – абсолютные величины;
модуль положительного числа;
модуль отрицательного числа;
неравенство с модулем – неравенства с модулями;
иррациональное неравенство – иррациональные неравенства.

178. Решите неравенства:

а) $|2x-1|<|3x+1|$;

б) $|3x-5|>9x+1$;

в) $|x^2-x+1|\geq|x^2-3x+4|$;

г) $|3x-8|<x-2$;

д) $|x^2+x-6|<x$;

е) $|x-1|+|x+1|<4$;

ж) $|x-3|+|x-5|\geq 6-x$;

з) $|2x-4|-|x-4|>4$.

179. Решите неравенства:

а) $\dfrac{|x+7|}{x^2+8x+7}<5$;

б) $\left|\dfrac{2x+5}{4x+1}\right|<1$;

в) $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|<\left|\dfrac{2}{x-2}\right|$;

г) $\dfrac{x^2-3|x|-4}{x+1}<-3x$;

д) $\left|x^2-|x|\right|\geq 0{,}25$;

е) $\left||x^2-3x+2|-1\right|\leq x-2$;

ж) $\dfrac{|x-18|}{|x-9|-9}<1$;

з) $\dfrac{(x+2)(x+1)}{x^2-|x|-2}\leq -3x$;

и) $\dfrac{x^2-|x|-6}{x^2+5x+6}>x-\dfrac{3}{2}$;

к) $\dfrac{|x^2-2x|-1-2x}{x^2-2+|x^2+3x|}<0$.

180. Решите неравенства:

а) $\sqrt{x^2-40x+39}\leq x-1$;

б) $\sqrt{x^2-4x}>x-3$;

в) $\sqrt{3x-4}+\sqrt{2x-13}>\sqrt{13-2x}$;

г) $\sqrt{x^2-x-12}>x-1$;

д) $\sqrt{45x^2-30x+1}<7+6x-9x^2$;

е) $\sqrt{x^2-3x-4}>x-2$;

ж) $\sqrt{2x+5}>x+1$;

з) $\sqrt{x^2-3x-10}<8-x$.

181. Решите неравенства:

а) $\sqrt{x^2-x-2}>2x+3$;

б) $\dfrac{2x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}\leq 3$;

в) $20\sqrt{\left(x^2-x\right)^2}<1$;

г) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-4}$;

д) $\sqrt{\left(x(x+3)\right)^2}\geq 2-x^2$;

е) $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}}>x-2$;

ж) $\sqrt{\left(\dfrac{x+1}{3-2x}\right)^2}>1$;

з) $\sqrt{2-x}\leq\sqrt{x+17}+\sqrt{2x-4}$.

182. Ответьте на вопросы:

а) Какое неравенство называется неравенством с модулями? Приведите пример.

б) Какие неравенства называются иррациональными? Приведите пример.

Контрольные вопросы по теме «Иррациональные уравнения и неравенства»

1. Что называют модулем?
2. Чему равен модуль положительного числа?
3. Чему равен модуль отрицательного числа?
4. Что такое уравнение с модулем? Приведите пример.
5. Какие уравнения называются иррациональными? Приведите пример.
6. Какое неравенство называется неравенством с модулями? Приведите пример.
7. Какие неравенства называются иррациональными? Приведите пример.

Модель контрольной работы к теме «Иррациональные уравнения и неравенства»

1. Решите уравнения:

а) $\sqrt{6+x-x^2}=-x$;

б) $|8-x|=|1+x|+1$;

в) $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{6x-5}=\sqrt[3]{2x-3}$.

2. Решите неравенства:

а) $\sqrt{2x+5}\geq x+1$;

б) $|x|-|x+2|>\dfrac{1}{3}$.

3. Какие уравнения называются иррациональными? Приведите пример.

4. Напишите на русском языке:

а) $1+\sqrt{2x+7}=x-3$;

б) $|5x-1|\leq|24-x|$;

в) $\sqrt[3]{0,2x+1,07}+\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{4}}\geq 0$.

ФУНКЦИИ

ЗАНЯТИЕ 20

20.1 Функции – понятие и методы задания

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Функция	Function	Fonction
Область определения	Domain of definition	Domaine de définition
Область значений	Range of values	Gamme de valeurs
График функции	Function graph	Graphe de fonction
Аналитический метод	Analytical method	Méthode analytique
Табличный метод	Tabular method	Méthode tabulaire
Графический метод	Graphic method	Méthode graphique
Ось абсцисс	Abscis axis	Axe de l'abscis
Ось ординат	Y-axis	Axe Y
Координатный угол	Coordinate Angle	Angle de coordonnée
Линейная функция	Linear function	Fonction linéaire
Прямая	Straight	Ligne droite
Биссектриса	Bisector	Bisecteur
Парабола	Parabole	Parabola
Гипербола	Hyperbola	Hyperbole
Обратная функция	Inverse function	Fonction inverse

Числовая функция есть отображение некоторого подмножества D множества действительных чисел R на другое подмножество E множества R. При этом множество D называется **областью определения** функции, а множество E - **областью значений** функции.

Таким образом, каждому элементу $x \in D$ сопоставлено хотя бы одно значение $y \in E$.

В элементарной математике обычно рассматриваются функции, заданные формулами. При этом имеется в виду, что:

–область определения функции состоит из независимого переменного, при подстановке которых все действия, указанные в правой части формулы, выполнимы и приводят к действительным числам;

–область значений функции – часть множества действительных чисел (возможно, совпадающая со всем множеством). Ее описание для задания функции не является обязательным.

Таким образом, если функция задана формулой, то необходимо ставить вопрос об отыскании ее области определения и области значений.

Пример 1. Найти область определения и область значений функции

$$y = x^2 - 5x + 6.$$

Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел. Для того, чтобы y попало в множество значений, необходимо и достаточно, чтобы квадратное уравнение $x^2-5x+6-y=0$ имело хотя бы одно действительное решение, то есть чтобы его дискриминант с был неотрицателен: $25-4(6-y)\geq 0$. Отсюда $y\geq -\frac{1}{4}$. Итак, область определения функции есть множество $D=(-\infty;+\infty)$, а область значений – $E=\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Пример 2. Найти область определения и область значений функции

$$y=\frac{1}{x^2-5x+6}.$$

Величина x будет принадлежать области определения функции тогда и только тогда, когда знаменатель этой дроби не равен нулю. Следовательно, область определения функции состоит из всех действительных значений x, кроме корней $x_1=2$ и $x_2=3$ квадратного трехчлена x^2-5x+6. Итак, $D=(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$. Чтобы найти множество значений функции, сделаем замену $y=\frac{1}{z}$. В предыдущем примере мы выяснили, что множество значений z есть $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$. Поэтому, когда z пробегает все положительные значения, y тоже пробегает все множество положительных чисел. Когда же $-\frac{1}{4}\leq z<0$, то $y\leq -4$; $z=0$ исключаем. Итак, $E=(-\infty;-4]\cup(0;+\infty)$.

Пример 3. Найти область определения и область значений функции

$$y=\sqrt{x}.$$

Область определения данной функции задается неравенством $x\geq 0$. При этом y принимает все неотрицательные значения.

Функцию $y=f(x)$ можно задать уравнением, то есть формулой, этот метод называют **аналитическим**.

Формула $y=5x+1$ устанавливает соответствие между множествами X и Y. Это соответствие является функцией с областью определения X и множеством значений Y. Обозначим эту функцию буквой φ, тогда $\varphi(1)=6;\ \varphi(2)=11;\ \varphi(-2)=-9$. Уравнение функции можно записать: $y=\varphi(x)$, где $\varphi(x)=5x+1$.

Функция задана **табличным методом**, если в таблице для функции $y=f(x)$ даны значения аргумента и соответствующие значения функции (таб. 20.1):

Таблица 20.1

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Например, рассмотрим таблицу квадратов натуральных чисел (таб. 20.2):

Таблица 20.2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Эта таблица устанавливает соответствие между множеством натуральных чисел $X = N = \{1; 2; 3; \ldots\}$ и множеством квадратов этих чисел $Y = \{1; 4; 9; \ldots\}$.

Данное соответствие является функцией. Обозначим ее буквой h или $y = h(x)$. Тогда для любого $x \in X$ можно из таблицы получить соответствующее значение $y \in Y$. Например, $h(1) = 1$; $h(2) = 4$; $h(3) = 9$; $h(4) = 16$ и так далее.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек на числовой плоскости с координатами $(x, f(x))$, где x пробегает множество $D(f)$.

Поскольку функция f полностью определяется заданием множества всех упорядоченных пар $(x, f(x))$, где x пробегает $D(f)$, то задание графика функции эквивалентно заданию функции.

Функцию $y = f(x)$ можно задать **графиком (графическим методом)**. По графику можно для любого значения $x \in X$ определить соответствующее значение $y \in Y$. Графиком функции может быть прямая линия, кривая линия (рис. 20.1), множество отдельных точек, совокупность точек и линий и так далее.

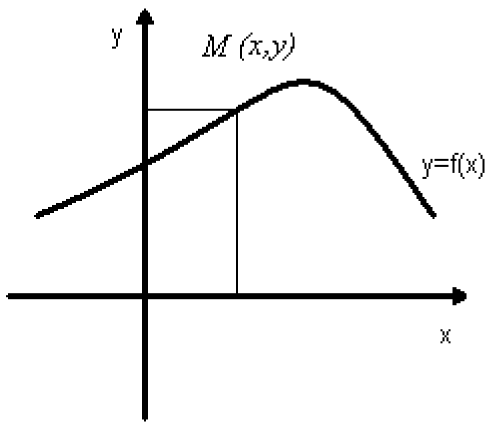


Рисунок 20.1 – График произвольной функции

20.2 Графики основных элементарных функций

График линейной функции $y = kx+b$ (рис. 20.2). Графиком является прямая. Для построения прямой достаточно двух точек. Величина k, называется **угловым коэффициентом**: $k = tg\alpha$, где α – угол, образованный прямой с положительным направлением оси абсцисс.

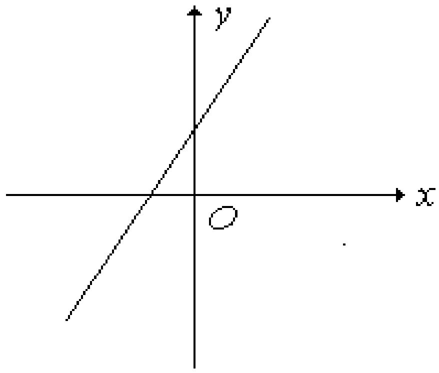
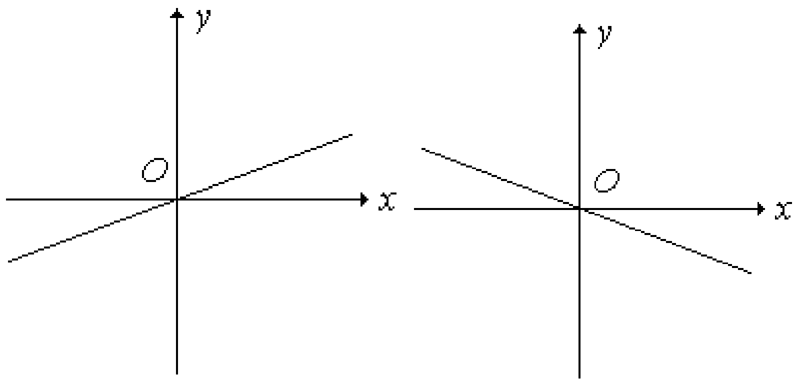


Рисунок 20.2 – График линейной функции

График функции $y = kx$. Графиком является прямая, которая проходит через начало координат, точку $O(0,0)$.

Если $k > 0$, то прямая образует острый угол α с положительным направлением оси Ox такой, что $tg\alpha = k$ (рис. 20.3,а).

Если $k < 0$, то соответствующий угол α является тупым (рис. 20.3,б).



а б

Рисунок 20.3 –Графики прямой: а – образует острый угол, б – образует тупой угол с осью Ox

График функции $y = x$. Графиком функции $y = x$ является биссектриса первого и третьего координатных углов (рис. 20.4).

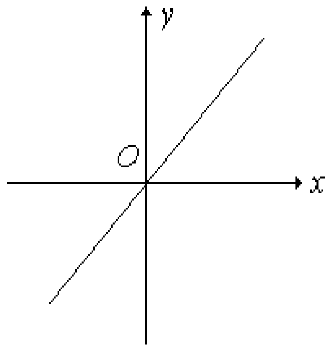


Рисунок 20.4 – График биссектрисы первого и третьего координатных углов

График функции $y = x^2$. Графиком данной функции является **парабола** (рис. 20.5).

График функции $y = \dfrac{1}{x}$ Графиком является **гипербола** (рис. 20.6). Проведем краткое исследование этой функции:

при $x > 0$ функция убывает с возрастанием x;

при $x \to \infty$ имеем $y \to 0$ (при этом $y > 0$);

при $x = 0$ функция не определена;

при $x \to 0$ функция $y \to \infty$;

при $x < 0$ функция возрастает с убыванием x.

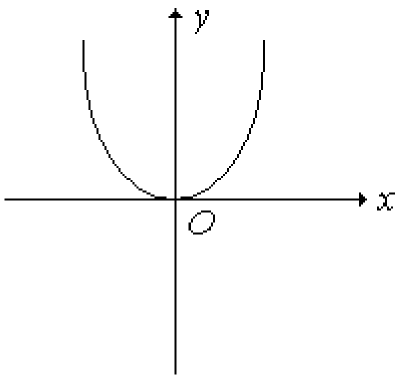


Рисунок 20.5 – Парабола

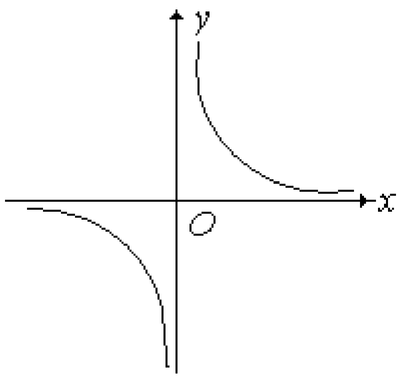


Рисунок 20.6 – Гипербола

Обратная функция и ее график. Рассмотрим функцию $y = f(x)$ с областью определения $D(f) = X$ и множеством значений $E(f) = Y$. На рисунке 20.7 изображен ее график. Области X и Y на нем есть отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно.

Пусть функция $y = f(x)$ обладает следующим свойством: различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции.

С помощью функции $y = f(x)$, обладающей этим свойством, можно построить новую функцию $x = g(y)$:

а) область определения ее – множество значений исходной функции $D(g) = Y = E(f)$;

б) множество значений $E(g) = X = D(f)$ – область определения исходной функции;

в) каждому $y \in Y$ функции g ставит в соответствие его прообраз x при отображении f.

Очевидно, функция $x = g(y)$, в свою очередь, является обратной к $y = f(x)$, и можно говорить о паре взаимно обратных функций.

График обратной функции. Чтобы получить изображение для $y = g(x)$ нужно симметрично отобразить относительно биссектрисы первого координатного угла график функции $y = f(x)$. Итак, для получения графика обратной функции нужно график исходной функции отобразить симметрично относительно прямой $y = x$.(рис. 20.7).

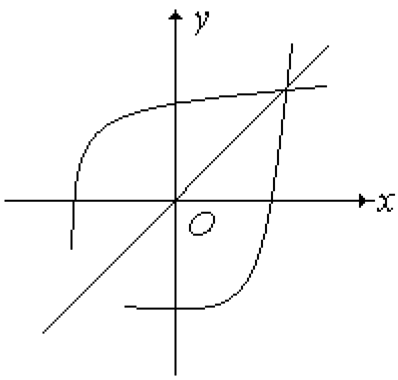


Рисунок 20.7 – График взаимно обратных функций

Упражнения

183. Прочитайте выражения:

функция – функции;
область определения функции;
область значения функции;
график функции – графики функций;
методы задания функций;
аналитический метод; табличный метод; графический метод;
линейная функция; квадратичная функция;
парабола; гипербола;
обратная функция.

184. Найдите область определения каждой из функций:

а) $f(x) = x - 1$;   б) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

в) $f(x)=\sqrt{x+2}$; г) $f(x)=\dfrac{15}{4x-32}$;

д) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$; е) $f(x)=\sqrt{27-x^3}$.

185. Постройте графики заданных функций:

а) $y=2x$ и $y=0{,}5x$; б) $y=3x+2$ и $y=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$;

в) $y=4x+5$ и $y=\dfrac{x-5}{4}$; г) $y=x^2,\ x\le 0$ и $y=-\sqrt{-x}$;

д) $y=x^2+4, x\ge 0$ и $y=\sqrt{x-4}$; е) $y=\dfrac{5}{x-5}$ и $y=5-\dfrac{5}{x}$.

186. Ответьте на вопросы:

а) Что такое функция? Приведите пример.
б) Что такое область определения функции? Как она обозначается?
в) Что такое область значения функции? Как она обозначается?
г) Назовите методы задания функций.
д) Что такое график функции?
е) Что такое линейная функция? Начертите ее график.
ж) Что такое квадратичная функция? Начертите ее график.
з) Что такое гипербола? Начертите ее график.
и) Что такое обратная функция? Как построить ее график?

ЗАНЯТИЕ 21

21.1 Показательная и логарифмическая функции

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Показательная функция	Exponential function	Fonction indicative
Логарифмическая функция	Logarithmic function	Fonction logarithmique
Логарифмирование	Logarithm	Logarithme
Показательное уравнение	Indicative equation	Équation indicative
Показательное неравенство	Indicative inequality	Inégalité indicative
Логарифмическое уравнение	Logarithmic equation	Équation logarithmique
Логарифмическое неравенство	Logarithmic inequality	Inégalité logarithmique

Функция вида

$$y = a^x \left(a > 0,\ a \neq 1\right) \qquad (21.1)$$

называется **показательной.**

Областью определения показательной функции является вся числовая ось $D:\ x \in R$, область значения $E(y) = \left(0; +\infty\right)$.

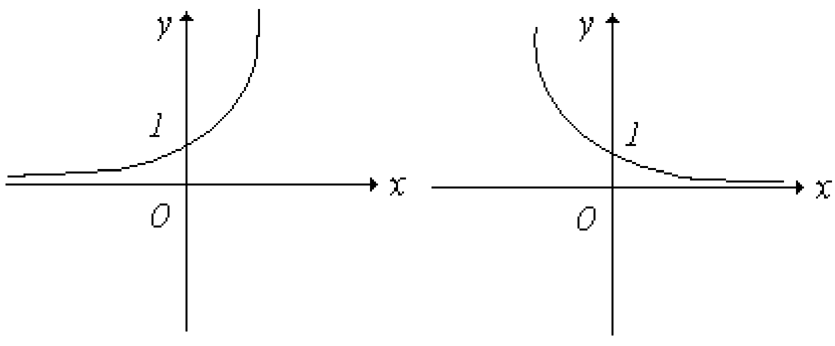
При $a > 1$ функция возрастает, а при $0 < a < 1$ убывает.

В случае $a > 1$ при $x \to +\infty$ имеем $a^x \to +\infty$, а при $x \to -\infty$ $a^x \to 0$. В случае $0 < a < 1$ получим $a^x \to 0$ при $x \to +\infty$ и $a^x \to +\infty$ при $x \to -\infty$.

Свойства показательной функции:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
3. $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$;
4. $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$;
5. $a^0 = 1$;
6. $a^1 = a$;
7. $1^x = 1$.

Свойства показательной функции можно проследить и на графиках функций $y = 2^x$ и $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ (рис. 21.1, а, б).



а б

Рисунок 21.1, а, б – График показательной функции: а – возрастающей, б – убывающей

Логарифмом положительного числа по основанию a $(a > 0,\ a \neq 1)$ называется показатель степени x, в которую следует возвести a, чтобы получить y. Иначе

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y,$$

где y – подлогарифмическое выражение, a – основание логарифма.

Читают логарифмы так:

$\log_a y$ – «логарифм числа игрек по основанию *a*»;

$\log_{10} x = \lg x$ – «логарифм числа икс по основанию десять» или «десятичный логарифм числа икс»;

$\log_e x = \ln x$ – «логарифм числа икс по основанию *e*» или «натуральный логарифм числа икс».

Определение логарифма можно записать и в виде

$$a^{\log_a y} = y \tag{21.2}$$

Функция

$$y = \log_a x \tag{21.3}$$

называется **логарифмической.**

Эта функция является обратной к показательной.

Поскольку уравнение (21.3) равносильно уравнению $x = a^y$, которое отличается от (21.1) лишь перестановкой переменных x и y, то график логарифмической функции (21.3) может быть получен из графика показательной функции (21.1) перестановкой координатных осей. Один из возможных способов этой перестановки – отражение графика и осей относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

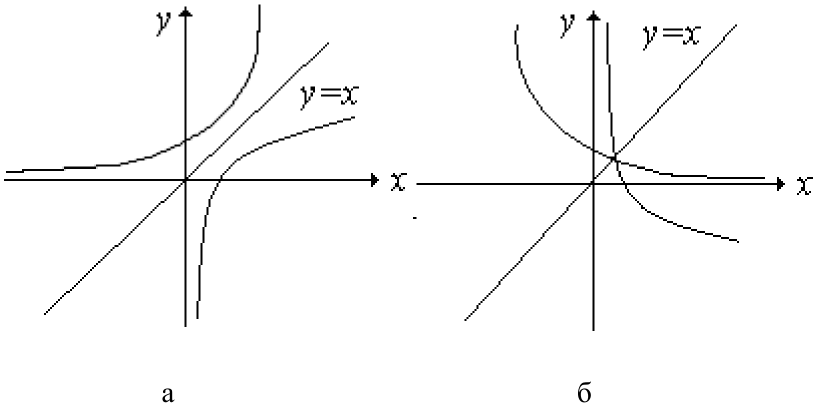


Рисунок 21.2 – График показательной и логарифмической функций:
а – возрастающей, б – убывающей

На рисунке 21.2, а изображены графики $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$, а на рисунке 21.2, б – графики $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

На этих графиках легко проследить свойства логарифмической функции, которые являются следствием соответствующих свойств показательной функции: областью определения логарифмической функции является множество действительных положительных чисел $X \in]0; +\infty[$; множество значений – множество всех действительных чисел $Y \in R$; симметрия отсутствует; при $x = 1$ логарифмическая функция равна нулю; если основание $a > 1$, то функция возрастает, причем $\log_a x \to +\infty$ при $x \to \infty$; если $0 < a < 1$, то $\log_a x$ убывает с возрастанием x и $\log_a x \to -\infty$ при $x \to +\infty$.

Поэтому при переходе через точку $x = 1$ функция $y = \log_a x$ меняет знак с минуса на плюс в случае $a > 1$ и с плюса на минус в случае $0 < a < 1$.

Свойства логарифмов ($x > 0$ и $y > 0$):

1. $a^{\log_a x} = x$ (основное логарифмическое тождество).
2. $\log_a a^x = x$.
3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ (формула для логарифма произведения).
4. $\log_a \left(1/x \right) = -\log_a x$.
5. $\log_a \left(x/y \right) = \log_a x - \log_a y$ (формула для логарифма частного).
6. $\log_a x^c = c \cdot \log_a x$, $c \in R$ (формула для логарифма степени).
7. $\log_{a^c} = \dfrac{1}{c} \log_a x$ для любого $c \neq 0$.
8. $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ (формула перехода к новому основанию).
9. $\log_a a = 1$.
10. $\log_a 1 = 0$.

При решении показательных и логарифмических уравнений часто используют два преобразования: логарифмирование и потенцирование.

Логарифмирование по основанию $c > 0,\ c \neq 1$ представляет собой переход от равенства

$$a = b \qquad (21.4)$$

к равенству

$$\log_c a = \log_c b \qquad (21.5)$$

здесь a и b могут обозначать как числа, так и выражения, содержащие переменные, если (21.4) – верное равенство и обе его части положительны , то и (21.5) –верное равенство.

Потенцированием по основанию $c > 0,\ c \neq 1$, называется переход от равенства (21.5) к равенству (21.4). Если (21.5) - верное равенство, то и (21.4) - верное равенство.

21.2 Показательные и логарифмические уравнения

Показательным называется уравнение, которое содержит показательную функцию, т. е. уравнение вида

$$a^{f(x)} = b,$$

где $a > 0,\ a \neq 1,\ b \in R$.

Одним из методов решения показательных уравнений является логарифмирование обеих его частей.

Пример 1. Решить уравнение

$$4^x = 8^{2x-1}.$$

Первый способ. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 2, получим уравнение, эквивалентное данному

$$2x = 3(2x-1),$$

откуда $x = \dfrac{3}{4}$.

Второй способ. Данное уравнение легко привести к виду

$$2^{2x} = 2^{3(2x-1)}$$

и учесть свойство монотонности показательной функции с основанием 2, что приводит к тому же результату.

Пример 2. Решить уравнение

$$3^{2x-1} \cdot 5^{3x+2} = \frac{9}{5} \cdot 5^{2x} \cdot 3^{3x}.$$

Логарифмируем обе части по какому-нибудь основанию, например, по основанию 10, получаем уравнение, эквивалентное данному,

$$(2x-1)\lg 3 + (3x+2)\lg 5 = 2\lg 3 - \lg 5 + 2x\lg 5 + 3x\lg 3,$$

откуда $x = -3$.

Можно решить и иначе: данное уравнение сводится к эквивалентному уравнению

$$\frac{3^{2x-1}}{3^2 3^{3x}} \frac{5^{3x+2} \cdot 5}{5^{2x}} = 1, \qquad \left(\frac{5}{3}\right)^{x+3} = \left(\frac{5}{3}\right)^0,$$

откуда $x + 3 = 0$, $x = -3$.

Часто показательные уравнения сводятся к простейшим путем подстановок.

Пример 3. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

Заметив, что произведение величин, стоящих в левой части, равно

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = (4-3)^x = 1,$$

обозначим $y = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x$. Уравнение сводится к квадратному относительно y; зная y, легко найти x. При этом заметим, что x удовлетворяет исходному уравнению тогда и только тогда, когда y удовлетворяет системе

$$\begin{cases} y = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x; \\ y + \dfrac{1}{y} = 4. \end{cases}$$

Отсюда, $x = \pm 2$.

Пример 4. Решить уравнение

$$5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 15 = 0.$$

Для того чтобы x был корнем этого уравнения, необходимо и достаточно, чтобы x и y были решениями системы

$$\begin{cases} y = 5^x; \quad (y > 0); \\ y^2 - 2y - 15 = 0. \end{cases}$$

Имеем $y_1 = 5; y_2 = -3$. Второе значение не удовлетворяет системе, а первое дает $x = \log_5 5 = 1$.

Многие примеры рассчитаны на использование определенной техники преобразований.

Пример 5. Решить уравнение

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}.$$

В левой части уравнения вынесем за скобку 2^x, а в правой 3^x. Получим уравнение, эквивалентное данному

$$2^x\left(1 + 2 + 2^2\right) = 3^x\left(1 + 3 + 3^2\right),$$

которое легко решается логарифмированием

$$x\lg 2 + \lg 7 = x\lg 3 + \lg 13;$$

$$x = \frac{\lg 13 - \lg 7}{\lg 2 - \lg 3} = \frac{\lg 13/7}{\lg 2/3}.$$

Логарифмическим называется уравнение, которое содержит логарифмическую функцию**,** т. е.

$$\log_a f(x) = b,$$

где $a > 0,\ a \neq 1,\ b \in R,\ f(x) > 0.$

При решении логарифмических уравнений обычно используют потенцирование.

Пример 6. Решить уравнение

$$\log_2\left(x^2 - 3x + 2\right) = \log_2\left(2x - 4\right).$$

Данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 2x - 4; \\ 2x - 4 > 0; \\ x^2 - 3x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 2x - 4; \\ 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

Из двух решений квадратного уравнения $x_1 = 3, x_2 = 2$ только первое удовлетворяет неравенству $2x - 4 > 0$.

Если бы мы ограничились потенцированием и получили бы только уравнение $x^2 - 3x + 2 = 2x - 4$, являющееся следствием данного, то понадобилась бы проверка, которая здесь довольно громоздкая. Лишний корень при таком переходе появляется за счет расширения ОДЗ, происходящего при замене суммы логарифмов логарифмом произведения.

Если расширение ОДЗ нежелательно, так как приводит иногда к появлению лишних корней, то сужение ОДЗ недопустимо, ибо может привести к потере корней, а это грубая ошибка.

Пример 7. Решить уравнение

$$\log_{\frac{x}{2}} x^2 + \log_{2x} x^3 = 0.$$

Перейдем к логарифмам по основанию x

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x \dfrac{x}{2}} + \frac{\log_x x^3}{\log_x 2x} = 0.$$

При этом мы сузили ОДЗ, нам для такого перехода приходится накладывать условия, чтобы $x > 0$ и $x \neq 1$. Первое из этих условий соблюдено. Если второе нарушается, т. е. $x = 1$, то удовлетворяется исходное уравнение. Пропустив этот случай, мы потеряли бы корень $x_1 = 1$.

Далее рассмотрим случай, когда $x \neq 1$. Полученное уравнение сводится заменой $y = \log_x 2$ к виду

$$\frac{2}{1-y} + \frac{3}{1+y} = 0,$$

откуда $y = 5$, возвращаясь к исходной переменной, имеем $x_2 = \sqrt[5]{2}$.

Рассмотрим уравнение менее стандартного типа.

Пример 8. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x}\right)^x = x^{\sqrt{x}}.$$

Поскольку $\sqrt{x}$ существует для $x \geq 0$, но $x \neq 0$, так как 0^0 не имеет смысла, то ОДЗ состоит из всех $x > 0$. Логарифмируя обе части по какому-нибудь основанию (например, 10), получаем

$$\frac{x}{2}\lg x = \sqrt{x}\lg x, \text{ или } \left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)\lg x = 0,$$

откуда $x = 4$, $x = 1$.

Если бы мы логарифмировали обе части по основанию x, то не получили бы второго решения.

21.3 Показательные и логарифмические неравенства

Некоторые показательные и логарифмические неравенства можно решить непосредственно, используя свойства возрастания и убывания показательной и логарифмической функций. Указанные свойства показательных и логарифмических функций реализуются в виде равносильных неравенств:

– при $a > 1$

$$a^x > a^y \quad \Leftrightarrow \quad x > y, \tag{21.6}$$

$$\log_a x > \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x > y, \end{cases} \tag{21.7}$$

– при $0 < a < 1$

$$a^x > a^y \quad \Leftrightarrow \quad x < y, \tag{21.8}$$

$$\log_a x > \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ x < y. \end{cases} \tag{21.9}$$

Пример 1. Решить неравенство $0{,}5^{1/x} \geq 0{,}0625$.

Заметив, что $0{,}0625 = 0{,}5^4$, запишем неравенство в виде

$$0{,}5^{1/x} \geq 0{,}5^4.$$

Воспользовавшись свойством (21.8) получим равносильное неравенство

$$\frac{1}{x} \leq 4 \text{ или } \frac{1-4x}{x} \leq 0.$$

Данному неравенству удовлетворяют следующие значения x: $x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left[1/4, +\infty\right[$.

Ответ: $x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left[1/4, +\infty\right[$.

Пример 2. Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} > 1.$

Перепишем исходное неравенство в виде

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}.$$

На основании свойства (21.9) имеем систему неравенств

$$0 < \frac{3x-1}{x+2} < \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+2} > 0, \\ \dfrac{3x-1}{x+2} < \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Решая первое неравенство, получим $x > \frac{1}{3}$ или $x < -2$; решая второе неравенство, получим $-2 < x < \frac{5}{8}$. Изображая решения неравенств на числовой прямой (рис. 21.3), находим решение данного неравенства.

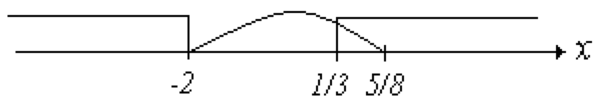


Рисунок 21.3

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{3}; \frac{5}{8}\right).$

Пример 3. Решить неравенство $\log_{x^2-3} 729 > 3.$

Запишем равносильное неравенство

$$\log_{x^2-3} 729 > 3\log_{x^2-3}\left(x^2-3\right).$$

Рассмотрим два случая:

1) если $x^2 - 3 > 1$, то получим

$$729 > \left(x^2-3\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad 9^3 > \left(x^2-3\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3<9.$$

Далее, решая систему неравенств, имеем

$$1 < x^2-3<9 \quad \Leftrightarrow \quad 4<x^2<12 \quad \Leftrightarrow \quad 2<|x|<\sqrt{12}$$

или

$$x \in \left(-2\sqrt{3};-2\right) \cup \left(2;2\sqrt{3}\right);$$

2) если $0<x^2-3<1$, имеем неравенство $729 < \left(x^2-3\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3>9$. Далее

$$\begin{cases} x^2-3>9, \\ 0<x^2-3<1 \end{cases} \Rightarrow \quad x \in \varnothing.$$

Ответ: $x \in \left(-2\sqrt{3};-2\right) \cup \left(2;2\sqrt{3}\right)$.

Пример 4. Решить неравенство $\log_x \log_3\left(9^x-7\right) \ge 1$.

Решая систему неравенств

$$\begin{cases} x>0,\ x \ne 1, \\ \log_3\left(9^x-7\right)>0, \end{cases}$$

находим область определения: $x > \log_9 8$. Представим исходное неравенство в виде

$$\log_x \log_3\left(9^x-7\right) \ge \log_x x.$$

Рассмотрим два случая:

1) если $x>1$, то $\log_3\left(9^x-7\right) \ge x \quad \Leftrightarrow \quad 9^x-7 \ge 3^x$. Подстановка $3^x=y$ приводит к неравенству, решая которое, находим

$$\left[\begin{array}{l} y \ge \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}, \\ y \le \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}. \end{array}\right.$$

Поскольку $y>0$ $\left(y=3^x\right)$, то значение $y \le \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$ не удовлетворяет неравенству. Решая неравенство $3^x \ge \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$, получим $x \ge \log_3 \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$ (это решение удовлетворяет условию $x>1$);

2) если $0<x<1$, получаем

$$\begin{cases} x>\log_9 8, \\ 0<x<1, \\ 9^x-7 \le 3^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_9 8<x<1, \\ \dfrac{1-\sqrt{29}}{2} \le 3^x \le \dfrac{1+\sqrt{29}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_9 8<x<1, \\ x \le \log_3 \dfrac{1+\sqrt{29}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_9 8<x<1.$$

Ответ: $x \in \left(\log_9 8;1\right) \cup \left[\log_3 \dfrac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right[$.

Пример 5. Решить неравенство $3^{\lg x+2} < 3^{\lg x^2+5} - 2$.

Выполним преобразования обеих частей неравенства:

$$3^{2+\lg x} < 3^{2(\lg x+2)+1} - 2.$$

Замена $3^{2+\lg x} = y$ приводит к неравенству $y < 3y^2 - 2$. Из решений этого неравенства $y > 1$; $y < -2/3$, то есть $y \in \left(-\infty; -2/3\right) \cup \left(1; +\infty\right)$. Оставляем второй интервал, так как $y > 0$. Далее имеем

$$3^{2+\lg x} > 1 \iff 3^{2+\lg x} > 3^0 \iff 2+\lg x > 0 \iff \lg x > -2 \quad x > 10^{-2}.$$

Ответ: $x \in \left(0{,}01; +\infty\right)$.

Пример 6. Решить неравенство $\left(0{,}5\right)^{\sqrt[x]{2}} < 0{,}0625$.

Выполним преобразования $\left(0{,}5\right)^{\sqrt[x]{2}} < \left(0{,}5\right)^4$. Так как основание меньше единицы, то получим

$$\sqrt[x]{2} > 4 \iff 2^{\frac{1}{x}} > 2^2 \iff \frac{1}{x} > 2 \iff \frac{1-2x}{x} > 0 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Упражнения

187. Прочитайте выражения:

показательная функция – показательные функции;
логарифмическая функция – логарифмические функции;
свойства показательной функции;
свойства логарифмической функции;
основание логарифма;
десятичный логарифм;
натуральный логарифм;
основное логарифмическое тождество;
логарифмирование; потенцирование;
показательное уравнение; показательное неравенство;
логарифмическое уравнение; логарифмическое неравенство.

188. Вычислите:

а) $\log_4 \sqrt[4]{8}$; б) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{9}$;

в) $\log_9 \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$; г) $2^{\log_2 32}$;

д) $3^{\log_3 \frac{1}{9}}$; е) $5^{\log_5 0{,}35}$;

ж) $49^{\log_7 2}$; з) $25^{0{,}5 \log_5 10}$;

и) $\log_{\frac{1}{3\sqrt{3}}} 9$;   к) $\dfrac{\lg(3+2\sqrt{2})}{\lg(\sqrt{2}+1)}$.

189. Найдите число x, если:

а) $\log_2 x = 3$;   б) $\log_2 x = -3$;   в) $\log_{\frac{1}{2}} x = 5$;

г) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$;   д) $\log_{\sqrt{3}} x = 7$;   е) $\log_{\sqrt{3}} x = -3$;

ж) $\log_a x = a$;   з) $\log_2 x = 0$;   и) $\log_{0,1} x = 1$.

190. Найдите основание x, если:

а) $\log_x 2 = 2$;   б) $\log_x 243 = 5$;   в) $\log_x \dfrac{1}{243} = -5$;

г) $\log_x 3\dfrac{3}{8} = -3$;   д) $\log_x 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{4}$;   е) $\log_x 2\sqrt[3]{2} = -6$;

ж) $\log_x \sqrt[5]{2} = -\dfrac{3}{5}$;   з) $\log_x \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}} = -0,8$;   и) $\log_x \sqrt[10]{3} = -0,1$.

191. Найдите x из уравнений:

а) $\log_{(x-2)} 9 = 2$;   б) $\log_{(3-x)} 2(x^2+2x-1) = 2$;

в) $\log_{(x-2)}(x^3-14) = 3$;   г) $\log_2(x^2+6x+17) = 3$;

д) $\log_{x^2+x+1} \log_{3x^2+5x-6}(x^2+9x) = 0$;   е) $\log_{3-x}(x^2-x-1) = 1$;

ж) $\log_{x^2+4x+3} \log_{2x^2-x+8}(x^2-7x) = 0$;   з) $\log_{\sqrt{5-2x}} 9 = 2$;

и) $\log_{\frac{1}{5}} \log_5 \sqrt{5x} = 0$;   к) $\log_{\log_3 x} 27 = -3$.

192. Решите уравнения:

а) $5\log_2 x = 3\log_2 x + 6$;   б) $2\log_3 x - 3\log_9 81 = 5\log_3 x$;

в) $(\log_3 x)^2 - 6\log_3 x + 9 = 0$;   г) $(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 = 0$;

д) $3\log_3^2 x + 7\log_3 x - 6 = 0$;   е) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

ж) $\log_{64} x + \log_8 x = 0,5$;   з) $\log_{81} x + \log_9 x + \log_3 x = 3,5$;

и) $\lg^6 x - 9\lg^3 x + 8 = 0$;   к) $\log_2^2 x^3 - \log_2 x^8 - 1 = 0$.

193. Решите уравнения:

а) $\log_x(9x^2)\cdot(\log_3 x)^2 = 4$;   б) $1+\dfrac{\log_8(10-4x)}{\log_8 4x} = \dfrac{2}{1+\log_4 x}$;

в) $\sqrt[x]{3^{5\sqrt{x}}} = 3^{\sqrt{x}-4}$;   г) $\sqrt{8^x\sqrt[3]{64^x\cdot\sqrt[x]{0,5}}} = 2\sqrt[3]{16}$;

д) $2\log_4 x + 3\log_x 4 = 5$;   е) $\log_{\sqrt{x}} 4\cdot\log_2 \sqrt[4]{\dfrac{16}{8-x}} = 1$;

ж) $2x^2 = (2x+5)\log_x 4\cdot\log_8 x$;

з) $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2 = 1$;

и) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$;

к) $\sqrt{2\log_8(-x)} - \log_8\sqrt{x^2} = 0$.

194. Решите уравнения:

а) $5^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100$;

б) $\left(\frac{2}{7}\right)^{x^2-1}\cdot\left(\frac{49}{4}\right)^{2x} = \left(\frac{8}{343}\right)^{\frac{4}{3}}$;

в) $\log_{\frac{x}{4}} 2x - \log_{4x}\frac{x}{\sqrt{2}} = -\frac{13}{4}\log_8 4$;

г) $\log_{9x} 27 - \log_{3x} + \log_9 243 = 0$;

д) $\sqrt[x]{\frac{9}{4}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = \log_4^2 8$;

е) $\left(x^2-x-1\right)^{x^2-1} = (x-3)^{x^2-1}$;

ж) $2^{x+\sqrt{x^2-4}} - 5(\sqrt{2})^{x-2+\sqrt{x^2-4}} - 6 = 0$

з) $(x+2)^{x^2} = (x+2)^{x+1}$.

195. Решите уравнения:

а) $\log_{25}^2 x^2 = \log_5 x\cdot\log_{\sqrt{5}}\left(\sqrt{x+5}-1\right)$;

б) $\log_3 8^{x-1}\cdot\log_4 27 = x+3$;

в) $\log_x 2\cdot\log_{2x} 2 = \log_{8x} 2$;

г) $(0{,}5)^x\cdot 2^{2x+3} = \frac{1}{8}$;

д) $5^{1+\log_4 x} + 5^{-1-\log_4 x} = \frac{26}{5}$;

е) $\log_7(x-1) = \log_7\left(\log_{\sqrt{3}} 3\right)$;

ж) $\log_x 3\cdot\log_{3x} 3 = \frac{1}{6}$;

з) $9^{x+1} - 3\cdot 3^{x+3} - 27\cdot 3^{x-2} + 27 = 0$;

и) $\frac{\log_{4\sqrt{x}} 2}{\log_{2x} 2} + \log_{2x}\cdot\log_{\frac{1}{2}} 2x = 0$;

к) $20\log_{4x}\sqrt{x} + 7\log_{16x} x^3 = 3\log_{\frac{x}{2}} x^2$.

196. Решите уравнения:

а) $\log_2\left(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1\right) - 2\log_4\left(\sqrt{\lg x} + 1\right) = 1$;

б) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x^2-2x+1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2-2x-1} = \frac{101}{10\left(2-\sqrt{3}\right)}$;

в) $\lg\left(3^x-4\right) + \lg 2 = \frac{x}{2}\lg\frac{1}{9} + \lg 2{,}5$;

г) $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 6$;

д) $4^{x+3} - (0{,}25)^{x=1} = 15$;

е) $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$;

ж) $\lg(10x)\cdot\lg(0{,}1x) = \lg x^3 - 3$;

з) $\log_2\left(12-2^x\right) = 5-x$;

и) $x\log_{x+1} 5\cdot\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{5}}}(x+1) = \frac{x-4}{x}$;

к) $\sqrt{\log_5 x} + \sqrt[3]{\log_5 x} = 2$.

197. Решите уравнения:

а) $3^{2-\log_3 x} = 81x$;

б) $x^{2-0{,}5\lg x} = 100$;

в) $7^{\lg x}-5^{\lg x+1}=3\cdot 5^{\lg x-1}-13\cdot 7^{\lg x-1}$;

г) $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}}=10$;

д) $4^{\log_{16}x}-3^{\log_{16}x-\frac{1}{2}}=3^{\log_{16}x+\frac{1}{2}}-2^{2\log_{16}x-1}$;

е) $27x^{\log_{27}x}=x^{\frac{10}{3}}$.

198. Решите уравнения:

а) $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$;

б) $5^{1+\frac{2}{x}}-7\cdot 10^{\frac{1}{x}}+2\cdot 4^{\frac{1}{x}}=0$;

в) $4\sqrt[x]{81}-12\sqrt[x]{36}+9\sqrt[x]{16}=0$;

г) $3\cdot 9^x+5\cdot 6^x=2^{2x+1}$;

д) $\sqrt[x]{100}+\sqrt[x]{25}=4{,}25\sqrt[x]{50}$;

е) $5^{\lg x}-3^{\lg x}=5{,}(3)\cdot 3^{\lg\sqrt{x}}\cdot 5^{\frac{1}{2}(\lg x-2)}$.

199. Решите неравенства:

а) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+2x-1\right)<1$;

б) $\log_8\left(x^2-4x+3\right)<1$;

в) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{4-3x}<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2-x^2}$;

г) $\log_{0,5}\left(\log_8\frac{x^2-2x}{x-3}\right)<0$;

д) $\log_{x^2}(2+x)<1$;

е) $2^{x^2+3x}>8\cdot 2^x$;

ж) $4^x-2\cdot 5^{2x}<10^x$;

з) $(0{,}5)^{x-2}>6$;

и) $\log_{0,2}\left(x^2-4\right)\geq -1$;

к) $\log_2\left(\log_{0,5}\left(2^x-\frac{15}{16}\right)\right)\leq 2$.

200. Решите неравенства:

а) $25^x<6\cdot 5^x-5$;

б) $\log_{\frac{x-1}{x\_5}}0{,}3>0$;

в) $\log_x\left(x^2+3x-3\right)>1$;

г) $\sqrt{\log_{0,5}\left(x^2+4x-4\right)}<1$;

д) $\log_{0,5}\log_2\log_{x-1}9>0$;

е) $2^x<3^{1/x}$;

ж) $\log_3\left(x^2-16\right)\leq\log_3(4x-11)$;

з) $\log_x(x+3)>2$;

и) $(x-3)^{2x^2-7x}>1$;

к) $\left(x^2-2{,}5x+1\right)^{x+1}\leq 1$.

201. Решите неравенства:

а) $\log_2\log_{\frac{1}{3}}(2-x)<2$;

б) $\log_x\frac{x-3}{x-2}>-1$;

в) $\log_x\log_2\left(4^x-3\right)\leq 1$;

г) $\log_2\left(4\cdot 3^x-6\right)-\log_2\left(9^x-6\right)>1$;

д) $9^{\log_{\sqrt{x}}3}\geq 27x$;

е) $\frac{2\lg x}{\lg x-1}>\frac{2}{\lg x-1}-\lg x$;

ж) $3\log_5 2+2-x<\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right)$;

з) $2\log_x 27-3\log_{27}x\leq 1$;

и) $\log_{2x}\left(x^2-5x+6\right)>1$;

к) $\log_{1/x}\frac{2x-1}{x-1}\leq -1$.

202. Решите неравенства:

а) $\dfrac{\lg 2x}{\lg(4x-15)}<2;$

б) $x^{\lg x-1}\geq 100;$

в) $\log_3\left(35-x^3\right)>3\log_3(5-x);$

г) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{1-x}}>\dfrac{1}{\sqrt{3}};$

д) $\log_{\frac{1}{2}}(x+5)^2>\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)^2;$

е) $\log_x\dfrac{3}{8-2x}\geq -2;$

ж) $(x-2)^{x^2-6x+8}>1;$

з) $\log_{0,5}\dfrac{x^2-4x+6}{x}<0;$

и) $2\log_2(x-1)>\log_2(5-x)+1;$

к) $\dfrac{7}{9^x-2}\geq\dfrac{2}{3^x-1}.$

203. Ответьте на вопросы:

а) Что такое показательная функция? Начертите ее график.
б) Напишите свойства показательной функции.
в) Что такое логарифмическая функция? Начертите ее график.
г) Напишите свойства логарифмической функции.
д) Что такое показательное уравнение? Приведите пример.
е) Что такое логарифмическое уравнение? Приведите пример.
ж) Что такое показательное неравенство? Приведите пример.
з) Что такое логарифмическое неравенство? Приведите пример.

Контрольные вопросы по теме «Функции»

1. Что такое функция? Приведите пример.
2. Что такое область определения функции? Как она обозначается?
3. Что такое область значения функции? Как она обозначается?
4. Назовите методы задания функций.
5. Что такое график функции?
6. Что такое линейная функция? Начертите ее график.
7. Что такое квадратичная функция? Начертите ее график.
8. Что такое гипербола? Начертите ее график.
9. Что такое обратная функция? Как построить ее график?
10. Что такое показательная функция? Начертите ее график.
11. Напишите свойства показательной функции.
12. Что такое логарифмическая функция? Начертите ее график.
13. Напишите свойства логарифмической функции.
14. Что такое показательное уравнение? Приведите пример.
15. Что такое логарифмическое уравнение? Приведите пример.
16. Что такое показательное неравенство? Приведите пример.
17. Что такое логарифмическое неравенство? Приведите пример

Модель контрольной работы по теме «Функции»

1. Построить график функции:

а) $y = x^2 - 2x - 3$;

б) $y = -2x + 3$.

2. Решите уравнения:

а) $2^{x-4}\left(2^x + 10\right) = 9$;

б) $\lg\left(2x - 19\right) - \lg\left(3x - 20\right) = -1$.

3. Решите неравенства:

а) $4\sqrt[x]{81} - 12\sqrt[x]{36} + 9\sqrt[x]{16} \geq 0$;

б) $3\left(\log_2 x\right)\left(\log_4 x\right)\left(\log_8 x\right) \leq 4$.

4. Что такое показательная функция? Начертите ее график.

5. Напишите на русском языке:

$\ln\left(0{,}02 - x\right)$; $\lg 100^{x+4}$; $7^{\log_{49}\left(x-9\right)}$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

ЗАНЯТИЕ 22

22.1 Тригонометрические функции

Словарь новых слов

Русский	**Английский**	**Французский**
Тригонометрия	Trigonometry	Trigonométrie
Радианная мера	Radiane measure	Mesure radiane
Прямоугольный треугольник	Right triangle	Triangle rectangle
Катет	Catet	Catet
Гипотенуза	Hypotenuse	Hypoténuse
Синус	Sinus	Sinus
Косинус	Cosine	Cosinus
Тангенс	Tangent	Tangente
Котангенс	Cotangent	Cotangent
Секанс	Secant	Sécante
Косеканс	Cosecant	Cosecant

Слово «тригонометрия» состоит из греческих слов: «тригонон» - треугольник и «метрезис» – измерение. **Основная задача тригонометрии** состоит в решении треугольников, то есть в вычислении неизвестных величин треугольника по данным значениям других его величин.

Наряду с градусной мерой в тригонометрии употребляется и другая мера, называемая **радианной**. В ней за единицу измерения принимается острый угол $\angle MON$ (рис. 22.1), под которым видна из центра окружности ее дуга MN, равная радиусу $\left(\overline{MN} = OM\right)$. Такой угол называется радианом. Величина этого угла не зависит от радиуса окружности и от положения дуги MN на окружности. Так как полуокружность видна из центра под углом 180°, а длина ее равна π радиусам, то радиан в π раз меньше, чем угол в 180°, то есть один радиан равен $\frac{180^\circ}{\pi}$ градусов:

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ,2958 \approx 57^\circ 17' 45''.$$

Обратно, один градус равен $\frac{\pi}{180^\circ}$ радиана.

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{радиана} \approx 0{,}017453 \text{ радиана}.$$

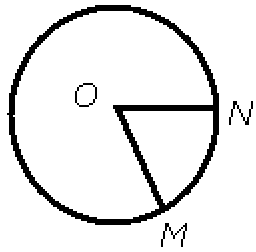


Рисунок 22.1 – Радианная мера угла

Решение всяких треугольников в конечном счете сводится к решению прямоугольных треугольников. Отношения различных пар сторон прямоугольного треугольника называются **тригонометрическими функциями** его острого угла.

В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 22.2) каждая из сторон имеет свое название. Стороны прямоугольного треугольника, прилежащие к прямому углу, называются **катетами** (AC, BC - катеты), а сторона, противолежащая прямому углу – **гипотенузой** (AB - гипотенуза).

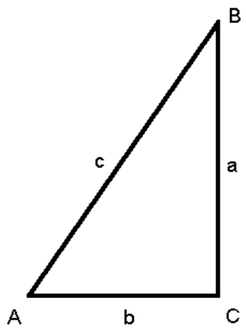


Рисунок 22.2 – Прямоугольный треугольник

По отношению к острому углу A тригонометрические функции имеют следующие названия и определения:

Синус острого угла это отношение противолежащего катета к гипотенузе, т. е. $\sin A = \dfrac{a}{c}$.

Косинус острого угла это отношение прилежащего катета к гипотенузе, т. е. $\cos A = \dfrac{b}{c}$.

Тангенс острого угла это отношение противолежащего катета к прилежащему, т. е. $\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$.

Котангенс острого угла это отношение прилежащего катета к противолежащему, т. е. $\operatorname{ctg} A = \dfrac{b}{a}$.

Секанс это отношение гипотенузы к прилежащему катету, т. е.

$\sec A = \dfrac{c}{b}$.

Косеканс это отношение гипотенузы к противолежащему катету, т. е. $\operatorname{cosec} A = \dfrac{c}{a}$.

22.2 Свойства и графики тригонометрических функций

Функция $y = \sin x$**.** Область определения функции - множество действительных чисел, область значений - отрезок $[-1;1]$. Функция периодическая, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x,\ k \in \mathbf{Z}$. Наименьший положительный период $T = 2\pi$. $\sin x$ возрастает от -1 до 1 на промежутках $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$ и убывает от 1 до -1 на промежутках $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi; \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.

Функция $\sin x$ – нечетная, то есть

$$\sin(-x) = -\sin x.$$

Из нечётности функции следует, что её график симметричен началу отсчёта. График функции $\sin x$ изображен на рисунке 22.3:

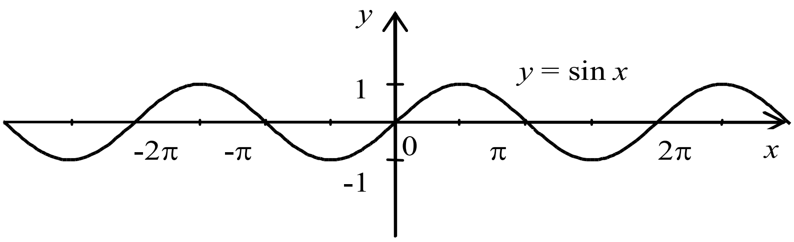


Рисунок 22.3 – График синуса

Функция $y = \cos x$. Область определения функции - все действительные числа, множество значений - отрезок $[-1;1]$. Функция $\cos x$ периодическая, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x,\ k \in \mathbf{Z}$. Наименьший положительный период $T = 2\pi$. Функция $\cos x$ возрастает от минус единицы до единицы на промежутках $[-\pi + 2k\pi; 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$ и убывает от единицы до минус единицы на промежутках $[2k\pi; \pi + 2k\pi], k \in \mathbf{Z}$.

Функция $\cos x$ - чётная, то есть

$$\cos(-x) = \cos x.$$

Из чётности функции следует, что её график симметричен оси ординат. График функции $\cos x$ изображен на рисунке 22.4:

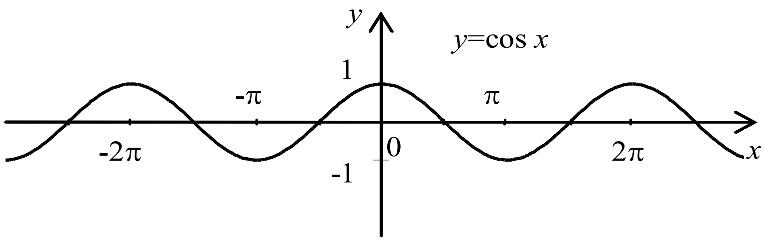


Рисунок 22.4 – График косинуса

Функция $y = \operatorname{tg} x$. Область определения функции $\operatorname{tg} x$ - множество всех действительных чисел, кроме $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, множество значений включает все действительные числа. Функция $\operatorname{tg} x$ - периодическая, $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$. Наименьший положительный период $T = \pi$. Тангенс возрастает в каждом из интервалов $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, k \in Z$. Функция $\operatorname{tg} x$ - нечётная, то есть

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x.$$

Из нечётности функции следует, что её график симметричен началу отсчёта. График функции $\operatorname{tg} x$ изображен на рисунке 22.5:

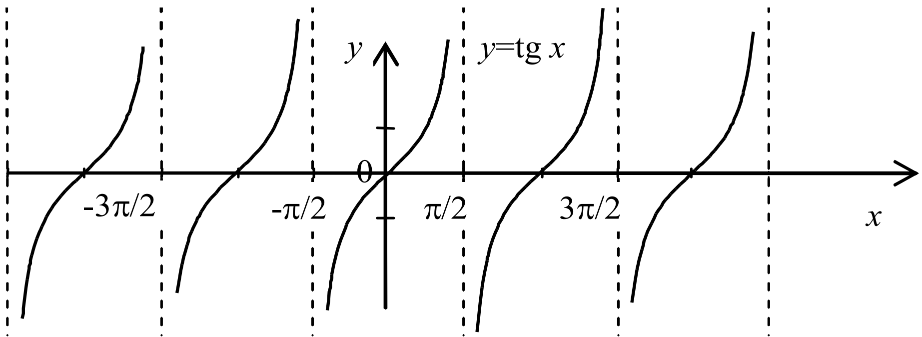


Рисунок 22.5 – График тангенса

Функция $y = \operatorname{ctg} x$. Область определения функции $\operatorname{ctg} x$ - множество всех действительных чисел, кроме $x = k\pi, k \in Z$, множество значений включает все действительные числа. Функция $\operatorname{ctg} x$ - периодическая, $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$. Наименьший положительный период $T = \pi$. Тангенс возрастает в каждом из интервалов $]k\pi; \pi + k\pi[, k \in Z$. Функция $\operatorname{ctg} x$ нечётная, то есть

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x.$$

Из нечётности функции следует, что её график симметричен началу отсчёта. График функции $\operatorname{ctg} x$ изображен на рисунке 22.6:

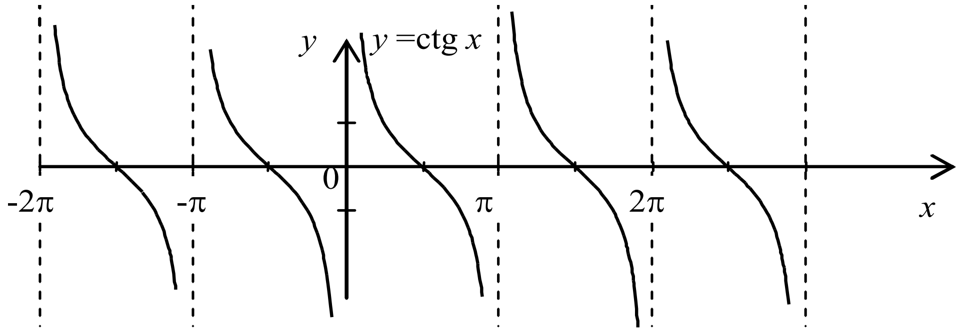


Рисунок 22.6 – График котангенса

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса в каждой из четвертей показаны на рисунке 22.7:

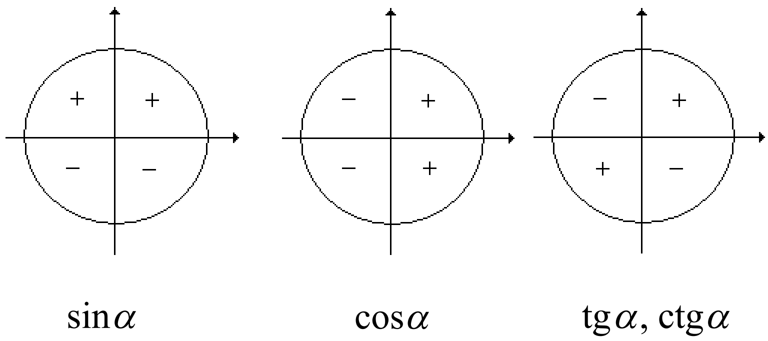


Рисунок 22.7 – Знаки тригонометрических функций

Замечание. Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса не изменяются при прибавлении к углу целого числа оборотов (то есть $n \cdot 2\pi$).

Для некоторых углов можно записать точные выражения их тригонометрических величин. Важнейшие случаи даны в таблице 22.1:

Таблица 22.1 – Значения тригонометрических функций некоторых углов

		Аргумент α						
Градусы		0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
Радианы		0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Функция	$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
	$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
	$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не сущ.	0	Не сущ.
	$ctg\alpha$	Не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не сущ.	0

22.3 Основные тригонометрические формулы

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (**основное тригонометрическое тождество**);

2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

3) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$;

5) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$;

6) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$;

7) $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$;

8) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

9) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Равенства (1) - (9) являются тождествами. Их называют **основными тригонометрическими формулами.** Рассмотрим примеры использования этих формул.

Пример 1. Найти $\cos\alpha, \operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Найдем сначала $\cos\alpha$. Из формулы (1) получаем, что

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha .$$

Так как α является углом второй четверти, то его косинус отрицателен. Значит,

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

Зная синус и косинус угла, можно найти его тангенс и котангенс:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{12}{5}.$$

Пример 2. Упростить выражение

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Имеем

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + (1+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} = \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + 1 + 2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)} =$$

$$=\frac{2+2\cos\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$

Пример 3. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

Преобразуем левую часть данного равенства:

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\sin^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)=$$

$$=\sin^2\alpha\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha-1\right)=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$$

Мы получили выражение, стоящее в правой части равенства. Таким образом, тождество доказано.

Формулы, выражающие тригонометрические функции аргументов через функции аргумента, называются **формулами приведения**. Сами функции называются приводимыми.

Правило приведения. Если в формуле приведения угол α вычитается из чисел $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ или прибавляется к ним, то приводимая функция меняется на кофункцию («синус» на «косинус», «тангенс на котангенс» и наоборот). Если α вычитается из чисел π и 2π или прибавляется к ним, то название приводимой функции сохраняется. Функция от α имеет тот же знак, что и приводимая функция (в этом случае α считается острым углом).

Формулы сложения это формулы, позволяющие выражать тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих углов.

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$ – **косинус разности**.

Косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов плюс произведение синусов этих углов.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$ – **косинус суммы**.

Косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение синусов этих углов.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$ – **синус суммы**.

Синус суммы двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс произведение косинуса первого угла на синус второго.

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$ – **синус разности**.

Синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго минус произведение косинуса первого угла на синус второго.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$ – **тангенс суммы**;

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$ – **тангенс разности**.

Пример 1. Вычислить $\cos 15^\circ$ и $\sin 15^\circ$.

Представим 15° в виде разности $45^\circ - 30^\circ$, тогда

$$\cos 15^\circ = \cos\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Пример 2. Упростить выражение $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$.

Воспользовавшись формулами косинуса суммы и косинуса разности, получим:

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta =$$
$$= 2\cos\alpha\cos\beta.$$

Формулы сложения позволяют выразить $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\mathrm{tg}2\alpha$ через тригонометрические функции угла α. Для этого необходимо положить в формулах сложения β равным α. Получим **формулы двойного аргумента:**

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ – синус двойного угла;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ – косинус двойного угла;

$\mathrm{tg}\,2\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$ – тангенс двойного угла;

$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}$ – котангенс двойного угла.

Пример 1. Найти значение $\sin 2\alpha$, зная, что $\cos 2\alpha = -0{,}8$ и α - угол второй четверти.

Сначала вычислим $\sin\alpha$. Так как α - угол второй четверти, то $\sin\alpha > 0$. Поэтому

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6.$$

По формуле синус двойного аргумента находим

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot 0{,}6\cdot(-0{,}8) = -0{,}96.$$

Пример 2. Упростить выражение $\sin\alpha\cos^3\alpha - \sin^3\alpha$.

Вынесем за скобки $\sin\alpha\cos\alpha$ и воспользуемся формулами двойного угла:

$$\sin\alpha\cos^3\alpha - \sin^3\alpha = \sin\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) = \frac{1}{2}(2\sin\alpha\cos\alpha)\cdot\cos 2\alpha =$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha = \frac{1}{4}\sin 4\alpha.$$

Другие важные тригонометрические формулы можно посмотреть в Приложении Б.

22.4 Доказательство тождеств. Упрощение выражений

При решении примеров на доказательство тригонометрических тождеств нужно знать все основные формулы и уметь преобразовывать обе части доказываемого тождества. В отдельных случаях применяются специальные приемы. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Доказать тождество $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\operatorname{cosec} x$.

Выполним преобразования

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\operatorname{cosec} x,$$

что и требовалось доказать.

Пример 2. Доказать тождество $\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}(2n+1)$.

Применяя формулы приведения $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$ и формулы двойного угла, имеем

$$\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Пример 3. Доказать тождество $\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1} = \frac{2}{3}$.

Замена $\sin^2\alpha = t$ приводит к тождественному выражению:

$$\frac{t^2 + (1-t)^2 - 1}{t^3 + (1-t)^3 - 1} = \frac{2t^2 - 2t}{3t^2 - 3t} = \frac{2}{3},$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Доказать тождество $4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

Используем формулу преобразования произведения в сумму:

$$4 \cdot \frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha + \frac{\pi}{6} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha - \frac{\pi}{6} + \alpha\right)\right) =$$

$$= 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) + \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right).$$

Умножим и разделим полученное выражение на $\sin\alpha$ и преобразуем:

$$\frac{2\sin\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos 2\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha},$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве некоторых тождеств применяют нестандартные приемы. Покажем это на примерах.

Пример 5. Доказать тождество $\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0=\frac{1}{8}$.

Умножим и разделим левую часть равенства на $\sin 20^0$, а затем применим формулу $\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$:

$$\frac{\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 80^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin\left(180^\circ-20^\circ\right)}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{1}{8}.$$

Пример 6. Доказать тождество

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha .$$

В левой части равенства сгруппируем слагаемые и применим формулу сумма косинусов:

$$(\cos\alpha+\cos 7\alpha)+(\cos 2\alpha+\cos 6\alpha)=2\cos 4\alpha\cos 3\alpha+2\cos 4\alpha\cos 2\alpha=$$

$$=2\cos 4\alpha\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha .$$

Рассмотрим примеры на упрощение тригонометрических выражений.

Пример 7. Упростить $\frac{1+\operatorname{ctg} 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$.

Выполним преобразования в числителе:

$$1+\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 2\alpha\sin\alpha+\cos 2\alpha\cos\alpha}{\sin 2\alpha\sin\alpha}=\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\sin 2\alpha\sin\alpha}.$$

Знаменатель дроби $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$. Окончательно имеем

$$\frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha\sin\alpha}:\frac{2}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha .$$

Пример 8. Упростить $\sin^3\alpha\cos 3\alpha+\cos^3\alpha\sin 3\alpha$

Выполним преобразования

$$\sin^3\alpha\cos 3\alpha+\cos^3\alpha\sin 3\alpha=\sin^2\alpha(\sin\alpha\cos 3\alpha)+\cos^2\alpha(\cos\alpha\sin 3\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\frac{1}{2}(\sin 4\alpha-\sin 2\alpha)+\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\frac{1}{2}(\sin 4\alpha+\sin 2\alpha)=$$

$$=\frac{1}{4}(2\sin 4\alpha+2\cos 2\alpha\sin 2\alpha)=\frac{3}{4}\sin 4\alpha .$$

Упражнения

204. Прочитайте выражения:

тригонометрия; тригонометрические функции;
угол; радианная мера угла;
прямоугольный треугольник;
катет – катеты; гипотенуза – гипотенузы;
синус; косинус; тангенс; котангенс; секанс; косеканс;
периодическая функция; периодические функции;
основное тригонометрическое тождество;
формулы приведения;
формулы сложения;
формулы двойного аргумента;
доказательство тождеств; упрощение выражений.

205. Докажите тождества:

а) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=2ctg\alpha;$

б) $\dfrac{1}{1+tg\alpha\cdot tg2\alpha}=\cos 2\alpha;$

в) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha};$

г) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2.$

206. Сократите дроби:

а) $\dfrac{\sin 40°}{\sin 20°};$

б) $\dfrac{\sin 100°}{\cos 50°}.$

207. Представьте в виде произведения:

а) $\sin 40° + \sin 16°$;

б) $\cos 46° - \cos 74°$.

208. Упростите выражения:

а) $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha-1;$

б) $(1+\sin\alpha)(1+\sin\alpha);$

в) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha};$

в) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2}+\sin\dfrac{\alpha}{2}}.$

209. Ответьте на вопросы:

а) Что такое прямоугольный треугольник?
б) Что такое катет прямоугольного треугольника?
в) Что такое гипотенуза прямоугольного треугольника?
г) Что такое косинус острого угла?
д) Что такое синус острого угла?
е) Что такое тангенс острого угла?
ж) Что такое котангенс острого угла?

з) Напишите свойства функции $y = \sin x$. Постройте ее график.

и) Напишите свойства функции $y = \cos x$. Постройте ее график.

к) Напишите свойства функции $y = \mathrm{tg} x$. Постройте ее график.

л) Напишите свойства функции $y = \mathrm{ctg} x$. Постройте ее график.

м) Напишите основное тригонометрическое тождество.

н) Напишите формулы двойного аргумента.

ЗАНЯТИЕ 23

23.1 Обратные тригонометрические функции

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Обратная тригонометрическая функция	Inverse trigonometric function	Fonction trigonométrique inverse
Арксинус	Arcsine	Arcsine
Арккосинус	Arccosine	Arccosine
Арктангенс	Arctangent	Arctangent
Арккотангенс	Arccots	Arccots
Тригонометрическое уравнение	Trigonometric equation	Équation trigonométrique

Функция, обратная функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, называется **арксинусом**: $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Областью определения функции $y = \arcsin x$ является отрезок $[-1;1]$, областью значений – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Функция нечётная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. График этой функции изображен на рисунке 23.1.

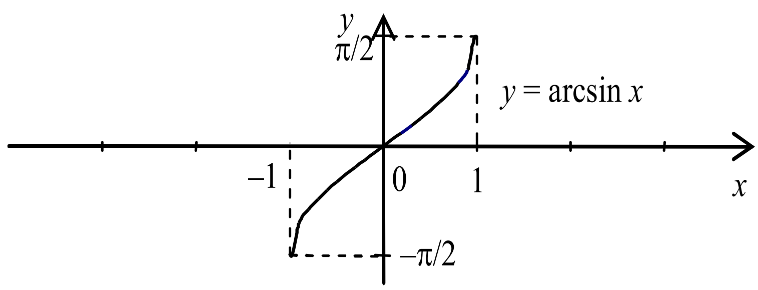


Рисунок 23.1 – График арксинуса

Функция, обратная функции $y = \cos x$ на отрезке $[0;\pi]$, называется **арккосинусом**: $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x,\ y \in [0;\pi]$. Областью определения функции $y = \arccos x$ является отрезок $[-1;1]$, областью значений - отрезок $[0;\pi]$. Функция ни чётная, ни нечётная.

Докажем, что $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$. По определению арккосинуса, $0 \le \arccos x \le \pi$, число $\pi - \arccos x$ заключено в этом же отрезке, то есть

$$0 \le \pi - \arccos x \le \pi .$$

Оба числа имеют одинаковый косинус, $\cos(\arccos(-x)) = -x$ и $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$, следовательно, числа равны.

График этой функции изображен на рисунке 23.2.

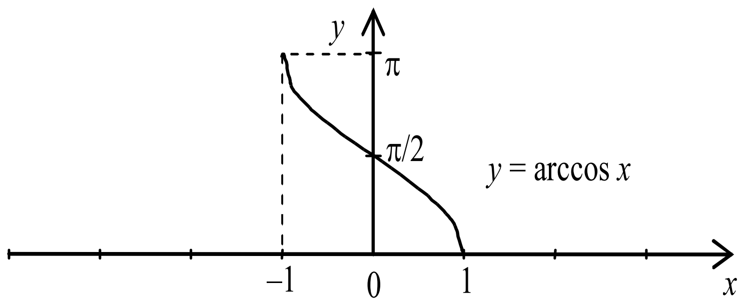


Рисунок 23.2 – График арккосинуса

Функция, обратная $\operatorname{tg} x$ на интервале $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, называется **арктангенсом**. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена на множестве всех действительных чисел, множество значений функции - интервал $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Функция нечётная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

График этой функции изображен на рисунке 23.3.

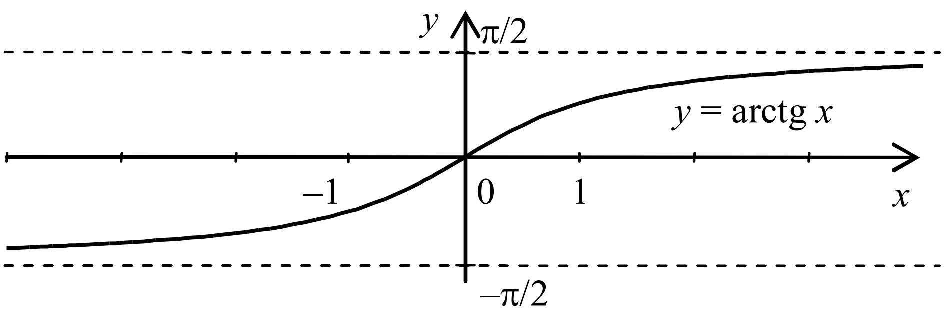


Рисунок 23.3 – График арктангенса

Функция, обратная $\operatorname{ctg} x$ на интервале $]0;\pi[$, называется **арккотангенсом**. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определена на множестве всех действительных чисел, множество значений функции - интервал $]0;\pi[$. Функция ни чётная, ни нечётная: $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$ (доказательство аналогично доказательству для арккосинуса).

График этой функции изображен на рисунке 23.4.

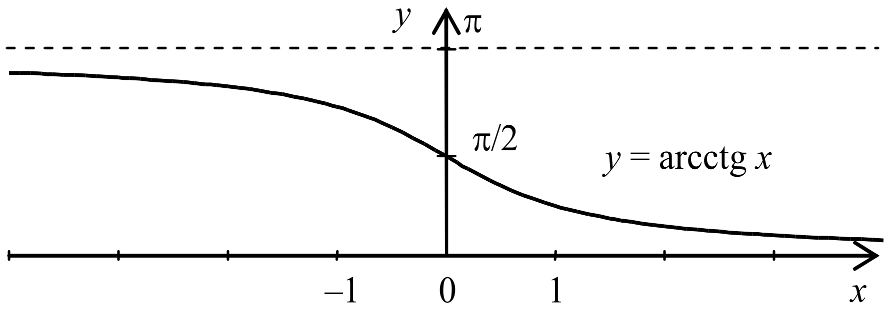


Рисунок 34 График арккотангенса

23.2 Простейшие тригонометрические уравнения

Уравнение $\sin x = m$**.** Решение существует при $|m| \le 1$ и выражается формулой

$$x = (-1)^k \arcsin m + k\pi, \text{ где } k \in Z \tag{23.1}$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin x + \frac{1}{2} = 0$.

Применим формулу (23.1): $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k\pi$, $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin 2x - \frac{1}{3} = 0$.

Применим формулу (23.1):

$$2x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k, \quad x = \frac{(-1)^k}{2} \arcsin\frac{1}{3} + \frac{\pi k}{2}, \ k \in Z.$$

Уравнение $\cos x = m$**.** Решение существует при $|m| \le 1$ и выражается формулой

$$x = \pm\arccos m + 2k\pi, \text{ где } k \in Z \tag{23.2}$$

Пример 3. Решить уравнение $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

Применим формулу (23.2):

$x - \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, откуда $x = \frac{5}{12}\pi + 2k\pi$ или $x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Уравнение $\operatorname{tg} x = m$**.** Решение существует при любом действительном m и выражается формулой

$$x = \operatorname{arctg} m + k\pi, \text{ где } k \in Z \tag{23.3}$$

Пример 4. Решить уравнение $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$.

По формуле (23.3) имеем $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, где $k \in Z$.

Пример 5. Решить уравнение $\operatorname{tg} x^2 + 1 = 0$.

Уравнение $x^2 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ имеет решение, если $-\frac{\pi}{4} + k\pi \geq 0$, то есть при $k \in N$. Получаем $x = \pm\sqrt{-\frac{\pi}{4} + k\pi}$, где $k \in N$.

Уравнение $\operatorname{ctg} x = m$**.** Решение существует при любом действительном m и выражается формулой

$$x = \operatorname{arcctg} m + k\pi, \text{ где } k \in Z \tag{23.4}$$

Пример 6. Решить уравнение $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

Применим формулу (23.4): $3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $x = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3}k$, где $k \in Z$.

Частные решения тригонометрических уравнений:

1. $\sin x = -1$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.
2. $\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in Z$.
3. $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.
4. $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.
5. $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.
6. $\cos x = 1$; $x = 2\pi k$, $k \in Z$.
7. $\operatorname{tg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.
8. $\operatorname{tg} x = 0$; $x = \pi k$, $k \in Z$.
9. $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.
10. $\operatorname{ctg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.
11. $\operatorname{ctg} x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

12. $\operatorname{ctg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Рассмотрим несколько тригонометрических уравнений, которые путем простых преобразований приводятся к простейшим уравнениям.

Пример 7. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x - 15^{\circ}\right)\operatorname{ctg}\left(x + 15^{\circ}\right) = \frac{1}{3}$.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{\sin\left(x-15^{\circ}\right)\cos\left(x+15^{\circ}\right)}{\cos\left(x-15^{\circ}\right)\sin\left(x+15^{\circ}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sin 2x - \sin 30^{\circ}\right)}{\frac{1}{2}\left(\sin 2x + \sin 30^{\circ}\right)} = \frac{2\sin 2x - 1}{2\sin 2x + 1}.$$

Далее решаем уравнение

$$\frac{2\sin 2x - 1}{2\sin 2x + 1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 6\sin 2x - 3 = 3\sin 2x + 1 \Leftrightarrow 2\sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi .$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$.

Пример 8.Решить уравнение $\sin^3 z \cos z - \sin z \cos^3 z = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin z \cos z\left(\sin^2 z - \cos^2 z\right) = \frac{1}{2}\sin 2z\left(-\cos 2z\right) = -\frac{1}{4}\sin 4z .$$

Затем решаем простейшее уравнение

$$-\frac{1}{4}\sin 4z = \frac{\sqrt{2}}{8} \Leftrightarrow \sin 4z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 4z = \left(-\frac{\pi}{4}\right)(-1)^k + k\pi .$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{16}(-1)^{k+1} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in Z$.

Пример 9.Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

Применяя формулу понижения степени, получаем:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos 4x\left(2\cos 2x + 1\right) = 0 .$$

Далее решаем уравнения

$$\cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4};$$

$$2\cos 2x = -1 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k .$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, где $k, n \in Z$.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\operatorname{ctg}3x+\sin(\pi+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0.$$

Выполним преобразования

$$\cos 2x\frac{\cos 3x}{\sin 3x}-\sin 2x-\sqrt{2}\cos 5x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x\cos 3x-\sin 2x\sin 3x-\sqrt{2}\cos 5x\sin 3x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 5x-\sqrt{2}\cos 5x\sin 3x=0\Leftrightarrow\cos 5x\left(1-\sqrt{2}\sin 3x\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 5x=0,\\ \sin 3x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{10}(2n+1),\\ 3x=(-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k.\end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10}(2n+1)$; $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$, где $n,k\in Z$.

Пример 11. Решить уравнение $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin 3x$.

Рассмотрим равносильные уравнения:

$$\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 3x\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin 3x=0\Leftrightarrow$$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{2}\right)=0,\\ \cos\left(\dfrac{5x}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{x}{2}=\pi n,\\ \dfrac{5x}{2}+\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}-2\pi n,\\ x=\dfrac{3\pi}{20}+\dfrac{2\pi k}{5}.\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}-2\pi n$; $x=\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi k}{5}$, где $n,\ k\in Z$.

Часто при решении тригонометрических уравнений применяют метод замены переменной. Рассмотрим примеры.

Пример 12. Решить уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2}$.

Прибавим к обеим частям уравнения выражение $2\sin^2 x\cos^2 x$ и рассмотрим равносильные уравнения

$$\sin^4 x++2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2}+2\sin^2 x\cos^2 x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=\sin 2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin^2 2x\Leftrightarrow\sin 2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Замена $\sin x=y$ приводит к уравнению

$$1=y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}y^2\Leftrightarrow y^2+2y-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-3,\\ y=1.\end{array}\right.$$

Далее решаем уравнения:

$$\sin 2x = -3 \Leftrightarrow x \in \varnothing;$$

$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, где $k \in Z$.

Пример 13. Решить уравнение $\sin 2x + 2\operatorname{ctg} x = 3$.

Проверяем, что $\operatorname{ctg} x \neq 0$, следовательно, $\operatorname{tg} x$ существует. Применяя формулу $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, получим равносильное уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3.$$

Произведем замену $y = \operatorname{tg} x$, получим

$$\frac{2y}{1+y^2} + \frac{2}{y} = 3 \Leftrightarrow 3y^3 - 4y^2 + 3y - 2 = 0.$$

Это уравнение имеет единственный действительный корень $y = 1$. Далее имеем

$$\operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Ответ: $x = \pi/4 + k\pi$, где $k \in Z$.

Упражнения

210. Прочитайте выражения:

обратные тригонометрические функции;
арксинус; арккосинус; арктангенс; арккотангенс;
тригонометрическое уравнение – тригонометрические уравнения;
простейшее тригонометрическое уравнение.

211. Вычислите:

а) $\sin\left(\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right) - \cos\left(-3\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$;

б) $\cos\left(3\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) - \operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right) + \arcsin\dfrac{1}{2}\right)$;

в) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cos\left(\operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} + 3\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$.

212. Решите уравнения:

а) $\sin(1-2x)=-\frac{1}{2}$;

б) $\cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 5x$;

в) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0,5 - \sin x \cdot \cos x$;

г) $\sin x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 1$;

д) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;

е) $2\sin 4x + 16 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x + 3\cos 2x - 5 = 0$.

213. Ответьте на вопросы:

а) Напишите свойства функции $y = \arccos x$. Постройте ее график.

б) Напишите свойства функции $y = \arcsin x$. Постройте ее график.

в) Напишите свойства функции $y = \mathrm{arctg} x$. Постройте ее график.

г) Напишите свойства функции $y = \mathrm{arcctg} x$. Постройте ее график.

д) Что такое тригонометрическое уравнение? Приведите пример.

Контрольные вопросы по теме «Тригонометрия»:

1. Что такое прямоугольный треугольник?
2. Что такое катет прямоугольного треугольника?
3. Что такое гипотенуза прямоугольного треугольника?
4. Что такое косинус острого угла?
5. Что такое синус острого угла?
6. Что такое тангенс острого угла?
7. Что такое котангенс острого угла?
8. Напишите свойства функции $y = \sin x$. Постройте ее график.
9. Напишите свойства функции $y = \cos x$. Постройте ее график.
10. Напишите свойства функции $y = \mathrm{tg} x$. Постройте ее график.
11. Напишите свойства функции $y = \mathrm{ctg} x$. Постройте ее график.
12. Напишите основное тригонометрическое тождество.
13. Напишите формулы двойного аргумента.
14. Напишите свойства функции $y = \arccos x$. Постройте ее график.
15. Напишите свойства функции $y = \arcsin x$. Постройте ее график.
16. Напишите свойства функции $y = \mathrm{arctg} x$. Постройте ее график.
17. Напишите свойства функции $y = \mathrm{arcctg} x$. Постройте ее график.
19. Что такое тригонометрическое уравнение? Приведите пример.

Модель контрольной работы по теме «Тригонометрия»:

1. Постройте графики тригонометрических функций:

а) $y = \cos x - 1$; б) $y = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} + 1$.

2. Постройте графики обратных тригонометрических функций:

а) $y = \arccos x + 1$; б) $y = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{3}$.

3. Решите уравнения:

а) $3\sin x = 2\cos^2 x$; б) $7\mathrm{tg}x - 4\mathrm{ctg}x = 12$.

4. Упростите выражение:

$$\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)}.$$

5. Напишите формулы двойного аргумента.

ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ

ЗАНЯТИЕ 24

24.1 Основные геометрические понятия и фигуры

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Прямая линия	Straight line	Ligne droite
Полупрямая	Semi-straight	Demi-droite
Отрезок	Section	Coupé
Угол	Angle	Angle
Вершина угла	Vertex of an angle	Haut du coin
Прямой угол	Right angle	Angle droit
Острый угол	Acute angle	Angle aigu
Тупой угол	Obtuse angle	Angle obtus
Смежные углы	Adjacent angles	Angles adjacents
Вертикальные углы	Vertical angles	Angles verticaux

Прямую линию (рис. 24.1, а) можно мысленно продолжить в обе стороны безгранично. Часть прямой лини, с одной стороны ограниченная, а с другой - нет, называется **полупрямой** или **лучом** (рис. 24.1, б). Часть прямой линии, ограниченная с обеих сторон, называется **отрезком** (рис. 24.1, в).

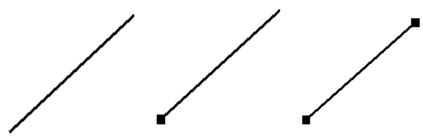
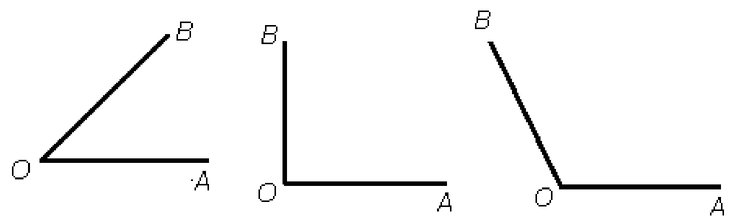


Рисунок 24.1 – Виды линий: а – прямая, б – луч, в – отрезок

Угол есть фигура (рис. 24.2, а), образованная двумя лучами *OA* и *OB* (**стороны угла**), исходящими из одной точки *O* (**вершины угла**).

Мерой угла служит величина поворота вокруг вершины *O*, переводящего луч *OA* в положение *OB*. Широко распространены две системы измерения углов: радианная и градусная.

В градусной системе измерения углов за единицу принимается угол, полученный поворотом луча на $\frac{1}{360}$ часть одного полного оборота - **градус** (обозначение ^{o}). Полный оборот, таким образом, составляет 360^{o}. Градус делится на 60 минут (обозначение $^{/}$); минута - на 60 секунд (обозначение $^{//}$). Угол в 90^{o} называется **прямым** (рис. 24.2, б). Угол, меньший 90^{o}, называется **острым** (рис. 24.2, а); больший 90^{o} - **тупым** (рис. 24.2, в). Прямые линии, образующие прямой угол, называются **перпендикулярными.**



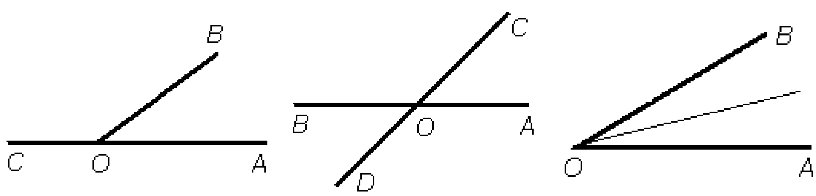
а б в

Рисунок 24.2 – Углы: а – острый, б – прямой, в – тупой

Смежные углы (рис. 24.3, а) - пара углов AOB и COB с общей вершиной O и общей стороной OB; две другие стороны OA и OC являются продолжением друг друга. Сумма смежных углов равна 180°.

Вертикальные углы (рис. 24.3, б) это пара углов, у которых вершина общая, а стороны одного составляют продолжение сторон другого. На рисунке 24.3, б $\angle AOC$ и $\angle DOB$, а также $\angle COB$ и $\angle AOD$), - вертикальные. Вертикальные углы равны между собой.

Биссектрисой угла называется луч, делящий угол пополам (рис. 24.3, в). Биссектрисы вертикальных углов являются продолжением друг друга. Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны.



а б в

Рисунок 24.3 – Углы: а – смежные, б – вертикальные, в – биссектриса

24.2 Многоугольники

Словарь новых слов

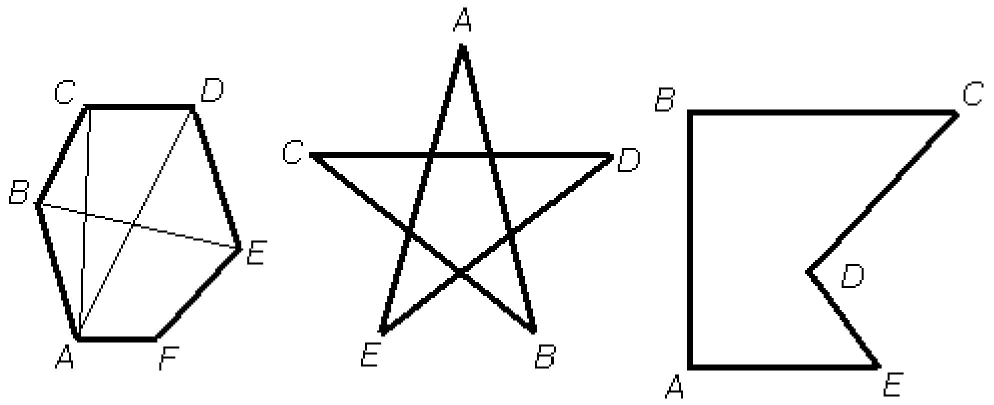
Русский	Английский	Французский
Многоугольник	Polygon	Polygone
Вершина многоугольника	Polygon vertex	Sommet de polygone
Сторона многоугольника	Polygon side	Côté polygone
Диагональ	Diagonal	Diagonale
Периметр	Perimeter	Périmètre
Выпуклый многоугольник	Convex polygon	Polygone convexe

Плоская фигура, образованная рядом прямолинейных отрезков, называется **многоугольником**. На рисунке 24.4, а изображен шестиугольник $ABCDEF$. Точки A, B, C, D, E, F - **вершины** многоугольника*;* углы при них - **углы** многоугольника ($\angle A, \angle B, ...$). Отрезки AC, AD, BE и так далее – **диагонали** – $AB, BC, CD, ...$ - **стороны** многоугольника. Сумма длин сторон $AB + BC + CD + ... + FA$ – называется **периметром** и обозначается P.

В элементарной геометрии рассматриваются только простые многоугольники, то есть, контуры которых не имеют самопересечений. Многоугольники, контуры которых имеют самопересечения, называются звездчатыми многоугольниками (рис. 24.4, б).

Если все диагонали многоугольника лежат внутри него, многоугольник называется **выпуклым.** Шестиугольник на рисунке 24.4, а - выпуклый; пятиугольник на рисунке 24.4, в - невыпуклый (диагональ лежит внутри многоугольника).

Сумма внутренних углов во всяком выпуклом многоугольнике равна $180^{\circ}(n-2)$, где n - число сторон многоугольника.



а б в

Рисунок 24.4 – Виды многоугольников: а – выпуклый, б – звездчатый, в – невыпуклый

24.3 Окружность

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
1	2	3
Окружность	Circle	Circonférence
Радиус	Radius	Rayon
Дуга	Arc	Arc
Секущая	Secant	Sécante
Хорда	Chord	Corde
Диаметр	Diameter	Diamètre

1	2	3
Круг	A circle	Cercle
Сегмент	Segment	Segment
Сектор	Sector	Secteur

Окружность есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки, называемой **центром** окружности.

Равные отрезки, соединяющие центр с точками окружности, называются **радиусами** (обозначения: r или R). Часть окружности, например, AD, (рис. 24.5) называется **дугой**. Прямая MN, проходящая через две точки окружности, называется **секущей**, а ее отрезок KL, лежащий внутри окружности, - **хордой**.

С приближением секущей к центру хорда увеличивается. Хорда BD, проходящая через центр (O), называется ***диаметром*** (обозначения: d или D). Диаметр равен двум радиусам $(d = 2r)$.

Кругом называется часть плоскости, лежащая внутри окружности.

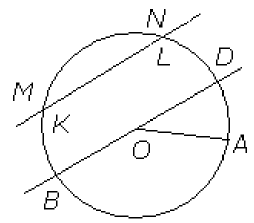


Рисунок 24.5 – Окружность и ее элементы

Пусть секущая PQ (рис. 24.6) проходит через точки A и B окружности. Пусть точка B движется по окружности, приближаясь к A. Секущая PQ будет менять положение, вращаясь около точки A. По мере приближения точки B к точке A секущая PQ будет стремиться к некоторому предельному положению MN. Прямая MN называется **касательной** к окружности в точке A. Касательная и окружность имеют только одну общую точку.

Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу OA, проведенному в точку касания A.

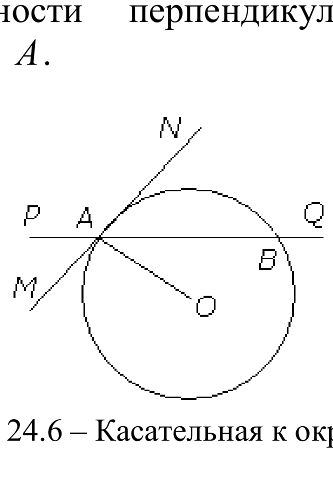


Рисунок 24.6 – Касательная к окружности

Сегментом называется часть круга, ограниченная дугой ACB и стягивающей ее хордой (рис. 24.7, а).

Перпендикуляр, восстановленный из середины хорды AB до пересечения с дугой AB, называется стрелкой дуги AB. Длина стрелки DC называется высотой сегмента.

Сектором называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами, проведенными к концам дуги (рис. 24.7, б, в). Сектор, отсекаемый радиусами, образующими угол 90°, называется **квадрантом** (рис. 24.7, г).

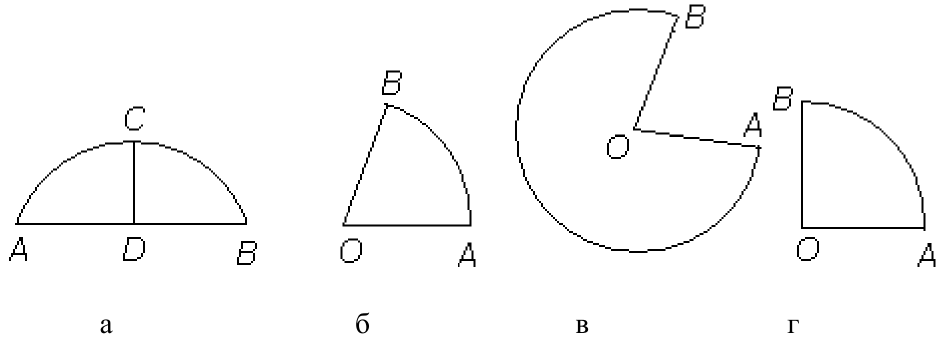


Рисунок 24.7 – Части круга: а – сегмент, б, в – сектор, г – квадрант

Упражнения

214. Прочитайте выражения:

прямая; полупрямая; луч; отрезок;
угол, вершина угла, стороны угла;
острый угол, прямой угол, тупой угол;
вертикальные углы; смежные углы;
многоугольник – многоугольники;
вершина, сторона, диагональ многоугольника;
выпуклый многоугольник; невыпуклый многоугольник;
окружность, центр окружности, радиус окружности;
диаметр, хорда, секущая, дуга окружности;
круг, сегмент, сектор, касательная.

215. Ответьте на вопросы:

а) Что такое луч? Чем луч отличается от прямой?
б) Что такое отрезок? Чем отрезок отличается от луча?
в) Чему равен 1 радиан?
г) Какие виды углов Вы знаете?
д) Какие углы являются смежными?
е) Какие углы являются вертикальными?
ж) Назовите виды многоугольников?
з) Что такое окружность?
и) Что такое радиус окружности?
к) Назовите формулу для вычисления диаметра окружности.

л) Назовите элементы окружности.
м) Что такое круг?
н) Назовите элементы круга.

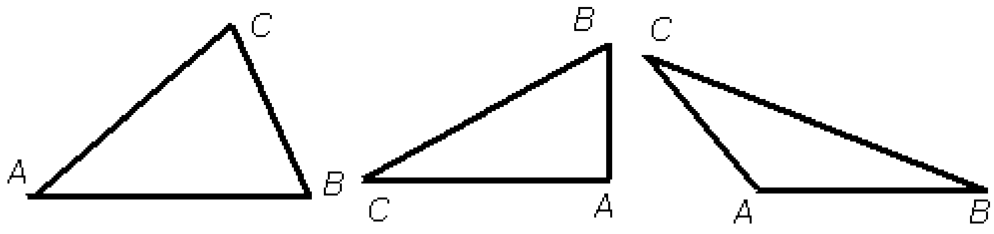
ЗАНЯТИЕ 25

25.1 Треугольники

Словарь новых слов

Русский	Английский	Французский
Треугольник	Triangle	Triangle
Остроугольный треугольник	Acute triangle	Triangle aigu
Прямоугольный треугольник	Right triangle	Triangle rectangle
Тупоугольный треугольник	Obtuse triangle	Triangle obtus
Равнобедренный треугольник	Isosceles triangle	Triangle isocèle
Равносторонний треугольник	Equilateral triangle	Triangle équilatéral
Боковые стороны	Sides	Côtés
Основание треугольника	Base of the triangle	Base du triangle
Катет	Catet	Catet
Гипотенуза	Hypotenuse	Hypoténuse
Площадь	Square	Zone
Высота	Height	Haut
Медиана	Median	Médiane
Биссектриса	Bisecteur	Bisecteur
Ортоцентр	Orthocenter	Orthocentre
Центр тяжести треугольника	Triangle center of gravity	Centre de gravité triangle

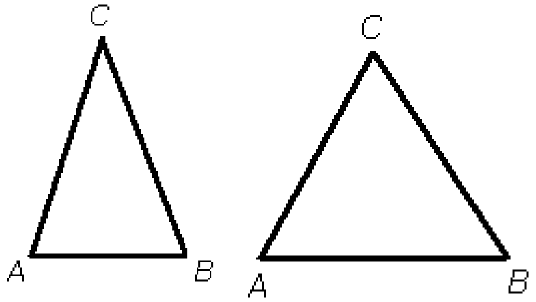
Треугольник - многоугольник с тремя сторонами. Стороны треугольника часто обозначаются малыми буквами, соответствующими обозначению противоположных вершин. Если все три угла острые, то треугольник – **остроугольный** (рис. 25.1, а). Если один из углов треугольника прямой, то треугольник – **прямоугольный** (рис. 25.1, б); стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a,b), а сторона, лежащая против прямого угла – **гипотенузой** (c). Если один из углов тупой, то треугольник – **тупоугольный** (рис. 25.1, в).



а б в

Рисунок 25.1 – Виды треугольников: а – остроугольный, б – прямоугольный, в – тупоугольный

Треугольник ABC называется **равнобедренным** (рис. 25.2, а), если две его стороны равны. Равные стороны равнобедренного треугольника называются **боковыми**; третья сторона - **основанием**. Треугольник ABC называется **равносторонним** (рис. 25.2, б), если три стороны его равны.



а б

Рисунок 25.2 – Треугольники: а – равнобедренный, б – равносторонний

В любом треугольнике сумма его углов равна 180°, а в равностороннем треугольнике каждый угол равен 60°.

Во всяком треугольнике против большей стороны лежит больший угол; против равных сторон - равные углы, и обратно.

Всякая сторона треугольника меньше суммы и больше разности двух других сторон $(a < b + c;\ a > b - c)$.

Для вычисления **площади треугольника** используют следующие формулы:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a;$$

$$S = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \sin\alpha \text{, где } \alpha = \angle BAC;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона),}$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр.

Признаки равенства треугольников:

Два треугольника равны, если у них соответственно равны:

1) две стороны и угол, заключенный между ними; например $AB = A'B'; AC = A'C'; \angle A = \angle A'$ (рис. 25.3);
2) два угла и прилежащая к ним сторона; например $\angle A = \angle A', \angle C = \angle C', AC = A'C'$;
3) три стороны: $AB = A'B', BC = B'C', AC = A'C'$.

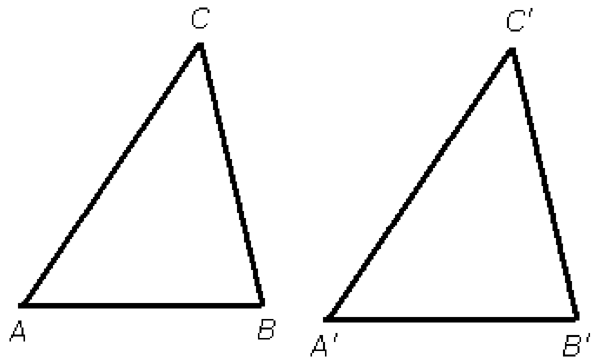
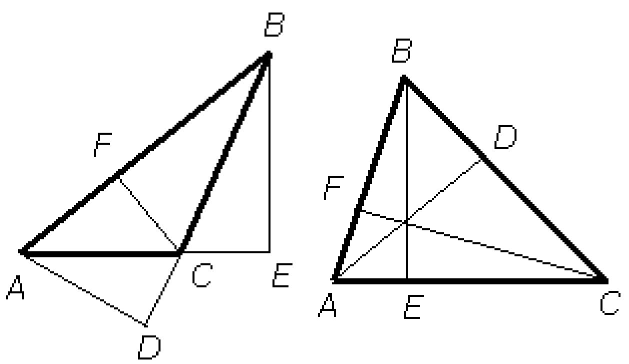


Рисунок 25.3 – Признаки равенства треугольников

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из любой вершины треугольника на противолежащую сторону или на ее продолжение (сторона, на которую опускается перпендикуляр, называется в этом случае **основанием** треугольника). В тупоугольном треугольнике основания двух высот попадают на продолжения сторон (рис. 25.4, а). Эти высоты лежат вне треугольника. В остроугольном треугольнике (рис. 25.4, б) все три высоты лежат внутри треугольника. В прямоугольном треугольнике катеты служат и высотами. Три высоты в треугольнике всегда пересекаются в одной точке, которая называется **ортоцентр**; в тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника; в прямоугольном он совпадает с вершиной прямого угла.



а б

Рисунок 25.4 – Высота в треугольнике: а – в тупоугольном, б – в остроугольном

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 25.5). Три медианы треугольника пересекаются в одной точке (которая всегда лежит внутри треугольника), являющейся **центром тяжести** треугольника. Эта точка делит каждую медиану в отношении два к одному (2:1), считая от вершины.

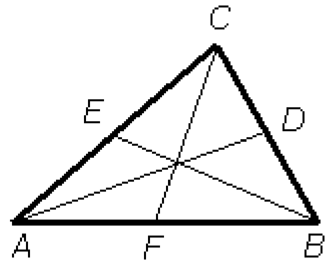


Рисунок 25.5 – Медиана в треугольнике

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы любого угла от вершины до пересечения с противоположной стороной (рис. 25.6). Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (всегда внутри треугольника), являющейся центром вписанного круга.

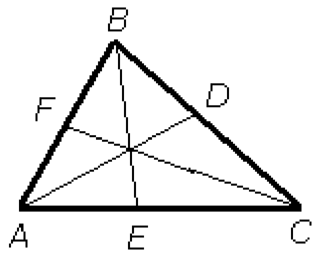


Рисунок 25.6 – Биссектриса в треугольнике

25.2 Четырехугольники

Словарь новых слов

Русский	**Английский**	**Французский**
Параллелограмм	Parallelogram	Parallélogramme
Основание	Base	La base
Прямоугольник	Rectangle	Rectangle
Ромб	Rhombus	Losange
Квадрат	Square	Carré
Трапеция	Trapezium	Trapèze
Средняя линия трапеции	Trapezium center line	Trapèze central

Параллелограммом $ABCD$ (рис. 25.7) называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

Свойства параллелограмма:

1. Противоположные стороны параллелограмма равны: $AD = CD$, $AD = BC$. Любые две противоположные стороны можно считать **основаниями**. Расстояние между ними (по перпендикуляру) называется **высотой** (BF).

2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам $(AO = OC, BO = OD)$.

3. Противоположные углы параллелограмма равны $(\angle A = \angle C, \angle B = \angle D)$.

4. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов четырёх его сторон.

Площадь S **параллелограмма** равна произведению основания (a) на высоту (h_a):

$$S = ah_a.$$

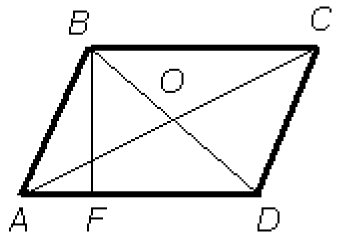


Рисунок 25.7 – Параллелограмм

Прямоугольник это параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 25.8, а) Стороны прямоугольника a и b одновременно служат его высотами.

Площадь прямоугольника равна произведению сторон. В прямоугольнике диагонали равны: $AC = BD$.

В прямоугольнике квадрат диагонали равен сумме квадратов двух смежных сторон: $AC^2 = AD^2 + DC^2$.

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется **ромбом** (рис. 25.8, б).

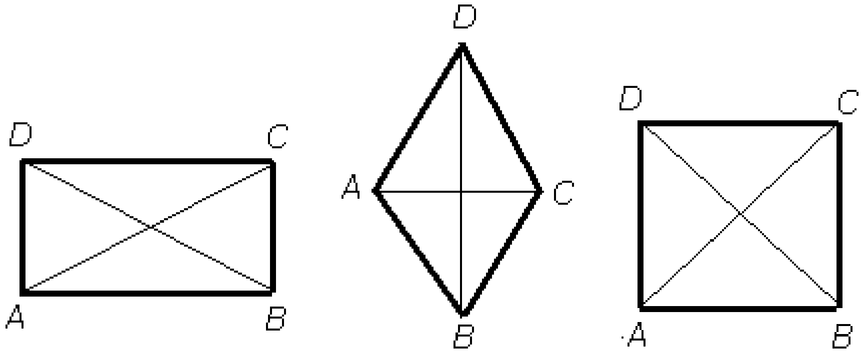
В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны $(AC \perp BD)$ и делят углы ромба пополам ($\angle DCA = \angle BCA$ и так далее).

Площадь ромба равна половине произведения диагоналей:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \left(AC = d_1, BD = d_2\right).$$

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 25.8, в). Квадрат является частным видом прямоугольника, а также частным видом ромба. Поэтому он обладает всеми выше перечисленными свойствами. **Площадь квадрата** равна квадрату его сторон:

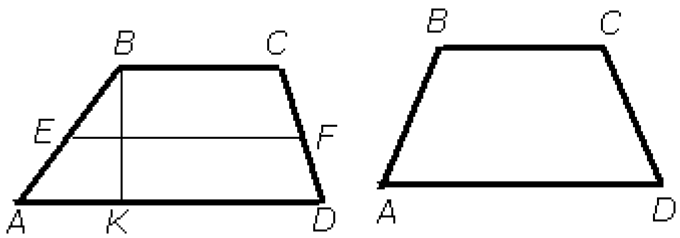
$$S = a^2.$$



а б в

Рисунок 25.8 – Четырехугольники: а – прямоугольник, б – ромб, в – квадрат

Трапецией называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны ($BC \parallel AD$) (рис. 25.9, а). Параллелограмм можно считать частным видом трапеции.



а б

Рисунок 25.9 – Виды трапеций: а – разносторонняя, б – равнобокая

Параллельные стороны называются **основаниями** трапеции, две другие (AB, CD) **боковыми сторонами**. Расстояние между основаниями (по перпендикуляру) называется **высотой** (BK). Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией трапеции**.

Средняя линия трапеции равна полусумме оснований: $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$, и параллельна им: $EF \parallel AD$.

Площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту:

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h \quad (AD = a, BC = b, BK = h).$$

Трапеция с равными боковыми сторонами (если она не параллелограмм) называется **равнобокой** ($AB = CD$, рис. 25.9, б). В равнобокой трапеции углы при основаниях равны $(\angle A = \angle D, \angle B = \angle C)$.

Упражнения

216. Прочитайте выражения:

треугольник – треугольники;

остроугольный, тупоугольный, прямоугольный треугольники;
равнобедренный, равносторонний треугольники;
высота, медиана, биссектриса треугольника;
четырёхугольник – четырёхугольники;
параллелограмм, свойства параллелограмма;
ромб, прямоугольник, квадрат, трапеция;
площадь параллелограмма;
равнобокая трапеция.

217. Сторона квадрата равна 10 см. Чему равны радиусы вписанной и описанной окружностей?

218. Прямоугольник вписан в окружность радиуса 5 см, одна из его сторон равна 8 см. Найдите другие стороны прямоугольника.

219. Диагонали ромба равны 10 и 24 см. Найдите его стороны.

220. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 6 см.

221. В параллелограмме $ABCD$ сторона $AB = 4$ см, $AD = 5$ см, угол A равен 45°. Вычислите длину диагонали BD.

222. Ответьте на вопросы:

а) Что такое треугольник? Начертите произвольный треугольник.
б) Какие виды треугольников Вы знаете?
в) Что такое высота треугольника?
г) Что такое медиана треугольника?
д) Что такое биссектриса треугольника?
е) Напишите формулы для вычисления площади треугольника.
ж) Какой треугольник называется прямоугольным?
з) Какой треугольник называется равнобедренным?
и) Какой треугольник называется равносторонним?
к) Что такое параллелограмм? Назовите свойства параллелограмма.
л) Является ли прямоугольник параллелограммом?
м) Что такое ромб? Назовите свойства ромба.
н) Что такое прямоугольник?
о) Что такое квадрат?
п) Что такое трапеция? Какая трапеция называется равнобокой?
р) Напишите формулу для вычисления площади параллелограмма.
с) Напишите формулу для вычисления площади прямоугольника.
т) Напишите формулу для вычисления площади квадрата.
у) Напишите формулу для вычисления площади трапеции.

Контрольные вопросы по теме «Элементы геометрии»

1. Что такое луч? Чем луч отличается от прямой?
2. Что такое отрезок? Чем отрезок отличается от луча?

3. Чему равен 1 радиан?
4. Какие виды углов Вы знаете?
5. Какие углы являются смежными?
6. Какие углы являются вертикальными?
7. Назовите виды многоугольников?
8. Что такое окружность?
9. Что такое радиус окружности?
10. Назовите формулу для вычисления диаметра окружности.
11. Что такое круг?
12. Что такое треугольник? Начертите произвольный треугольник.
13. Какие виды треугольников Вы знаете?
14. Что такое высота треугольника?
15. Что такое медиана треугольника?
16. Что такое биссектриса треугольника?
17. Напишите формулы для вычисления площади треугольника.
18. Какой треугольник называется прямоугольным?
19. Какой треугольник называется равнобедренным?
20. Какой треугольник называется равносторонним?
21. Что такое параллелограмм? Назовите свойства параллелограмма.
22. Является ли прямоугольник параллелограммом?
23. Что такое ромб? Назовите свойства ромба.
24. Что такое прямоугольник?
25. Что такое квадрат?
26. Что такое трапеция? Какая трапеция называется равнобокой?
27. Напишите формулу для вычисления площади параллелограмма.
28. Напишите формулу для вычисления площади прямоугольника.
29. Напишите формулу для вычисления площади квадрата.
30. Напишите формулу для вычисления площади трапеции.

Модель контрольной работы по теме «Элементы геометрии»

1. Начертите прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *B*. Укажите в нем катеты и гипотенузу.

2. Начертите ромб *ABCD.* Укажите диагонали ромба. Проведите высоту *BK.* Чему равна градусная мера угла *BKA*? Верно ли, что у ромба диагонали перпендикулярны?

3. В трапеции *ABCD* основание *BC* равно 6 см, а боковая сторона *AB* равна 5 см. Высота *BK* отсекает на основании *AB* отрезки: *AK* = 3 см и *KD* = 7 см. Найдите высоту и площадь трапеции.

4. В прямоугольном треугольнике катет равен 4 см, а прилежащий к нему угол равен 45°. Найдите другой катет и гипотенузу.

5. Что такое окружность? Начертите окружность радиуса 1 см. Найдите диаметр полученной окружности.

ОТВЕТЫ

35. а) 200; б) 600; в) 90; г) 1 500. **36.** а) 199; б) 9 427 000; в) 689; г) 200; д) 301. **86.** а) $2\frac{1}{3}$. **91.** 40. **92.** а) $8\frac{31}{50}$. **100.** а) 4,5; з) $x=4$; и) $x=0{,}002$; к) $x=10$; н) $x=5$. **112.** б) $\frac{1}{35}$; в) 87; г) $2\frac{1}{8}$. **113.** в) 1.

146. а) $x\in\varnothing$; б) $x=3$; в) $x=-8$; **147.** в) $x_{1,2}=3$; г) $x_{1,2}=-\frac{1}{5}$; д) $x\notin R$; е) $x\notin R$; ж) $x_1=5$, $x_2=8$; з) $x_1=1, x_2=17$. **152.** а) $x=-2$; б) $x_1=-4$, $x_2=2$; и) $x\in\varnothing$. **154.** а) $x_1=\frac{4}{5}, x_2=\frac{2}{7}$. **157.** а) $(-2;-3),(3;2)$; д) $(1;2)$; ж) $(-1;-2)$, $(-5;-10)$; и) $(3;2),(-3;-2)$. **161.** б) $x\in(-7;+\infty)$. **163.** з) $x\in\left(\frac{3}{29};10\right)$.

171. а) $x_1=-\frac{7}{2}, x_2=\frac{7}{2}$; г) $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$; з) $x=-\frac{5}{2}$. **172.** а) $x_{1,2}=\pm 3$; в) $x=2$; д) $x=5$; и) $x=2$. **173.** г) $x_1=2, x_2=-\frac{1}{3}$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варшавская Л. В. Алгебра и элементарные функции / Л. В. Варшавская, Е. А. Лазарева. – М. : изд-во Моск. ун-та, 1978. – 224 с.

2. Вороновская Л. П. Методические указания для практических и самостоятельных занятий по курсу «Математика» для иностранных студентов подготовительного отделения инженерно-технических, инженерно-экономических, охраны здоровья, биологических, физкультурных и сельскохозяйственных специальностей / Харьков. нац. ун-т гор. хоз-ва им. А. Н. Бекетова ; сост.: Л. П. Вороновская, А. А. Кузнецова. – Харьков : ХНУГХ им. А. Н. Бекетова, 2017. – 65 с.

3. Вороновская Л. П. Математика (для студентов подготовительного отделения) : учебное пособие / Л. П. Вороновская, Л. Б. Коваленко. – Харьков : ХНАГХ, 2007. – 150 с.

4. Кузнецова Г. А. Словник з математики (з перекладом російською, українською, англійською, французькою та арабською мовами для іноземних студентів підготовчого відділення) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова ; уклад. : Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2017. – 56 с.

5. Котельникова О. С. Алгебра : учеб. пособие для иностранных студентов предвузовского этапа обучения / О. С. Котельникова. – Воронеж : Воронежский государственный университет, 2012. – 73 с.

6. Мерзляк А. Г. Геометрия. 9 кл. : сборник задач и контрольних работ / А. Г. Мерзляк, В. В. Полонский, У. М. Рабинович, М. С. Якир. – Харьков : Гимназия, 2012. – 120с.: илл.

7. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях: навч. посібник для учнів 7-11 кл. / Є. П. Нелін. – Харків : Гімназія, 2011. – 128 с.

8. Нелін Є. П. Геометрія в таблицях: навч. посібник для учнів 7-11 кл. / Є. П. Нелін. – Харків : Гімназія, 2016. – 6-е вид. – 128 с.

9. Печенежский Ю. Е. Задания для самостоятельных и контрольних работ по разделу «Системы нелинейных уравнений» курса элементарной математики / Харьков. инст. инж. город. хоз-ва: сост. Ю. Е. Печенежский. – Харьков : ХИИГХ, 1990. – Ч. 1 – 64 с.

10. Роганин А. Н. Алгебра и начала анализа в схемах, терминах, таблицах / А. Н. Роганин. – Ростов н/Д : Феникс, 2013. – 111 с.

11. Сканаві М. І. Збірник задач з математики для вступників до втузів / В. К. Єгерєв, В. В. Зайцев, Б. А. Кордємський та ін..; За ред. М. І. Сканаві; Пер. з рос.: Є. В. Бондарчук, Ю. Ю. Костриця, Л. П. Оніщенко. – Київ : Вища шк., 1996. – 3-тє вид., стер. – 445 с.: іл.

УКАЗАТЕЛЬ СЛОВ

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Дополнительные математические знаки

Таблица А.1 – Словарь дополнительных математических знаков

Знак	Русский	Английский	Французский
1	2	3	4
∞	Бесконечность	infinity	l'infini
$+\infty$	Плюс бесконечность	plus infinity	plus l'infini
$-\infty$	Минус бесконечность	minus infinity	moins l'infini
$\in$	Принадлежит	belongs	appartient à
$\notin$	Не принадлежит	not belong	n'appartient pas
%	Процент	percent	pourcentage de
$\exists$	Квантор существования	quantifier of existence	quantificateur d'existence
$\overline{\exists}$	Не существует	there does not exists	il n'existe pas
$\forall$	Квантор всеобщности	quantifier of universality (for all)	quantificateur de l'universalité
$\Leftrightarrow$	Эквивалентно	is equivalent to	est équivalent à
$\Rightarrow$	Следовательно	consequently (implies)	donc
$\varnothing$	Пустое множество	empty set	ensemble vide
$\bigcup$	Знак объединения множеств	set union sign	mettre le signe de l'union
$\bigcap$	Знак пересечения	crossing sign	signe de croisement
$\subset$	Знак подмножества	subset sign	signe de sous-ensemble
a^n	Степень	power	degré de
$\sqrt[n]{a}$	Корень	root	la racine
$\log_a x$	Логарифм	logarithm	logarithme
$\ln x$	Натуральный логарифм	natural logarithm	logarithme naturel
$\lg x$	Десятичный логарифм	decimal logarithm	logarithme décimal
$n!$	Факториал	factorial	factoriel
a_n	Индекс	index	index

Продолжение таблицы А.1

1	2	3	4
$y = f(x)$	Функция	function	fonction
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	Предел	limit	la limite
Δx	Приращение	increment	augmentation
	Аргумент	argument	un argument
y'	Производная	derivative	dérivé
$\int\limits_a^b f(x)dx$	Интеграл	integral	intégrale
$\lvert a \rvert$	Модуль	module	module
$\parallel$	Параллельность	parallelism	parallélisme
$\perp$	Перпендикуляр-ность	perpendicularity	perpendicularité
a°	Градус	degree	degré
a'	Минута	minute	minute
a''	Секунда	second	deuxième
$\angle$	Угол	angle	coin
$\vec{a}$	Вектор	vector	vecteur
ΔABC	Треугольник	triangle	triangle
P	Периметр	perimeter	périmètre
l	Длина	length	la longueur
S	Площадь	square	carré
V	Объем	volume	volume
H, h	Высота	height	la hauteur
R, r	Радиус	radius	rayon

Читаем дополнительные математические знаки так:

∞ бесконечность

$+\infty$ плюс бесконечность

$-\infty$ минус бесконечность

$\in$ принадлежит (чему?) ($x \in R$ «икс принадлежит множеству действительных чисел»)

$\notin$ не принадлежит (чему?) ($x \notin N$ «икс не принадлежит множеству натуральных чисел»)

% процент

$\exists$ квантор существования («существует»)

$\forall$ квантор всеобщности («для любого»)

$\Leftrightarrow$ знак эквивалентности, равнозначности («эквивалентно»)

$\Rightarrow$ знак следования («следовательно»)

$\varnothing$ пустое множество

$\cup$ знак объединения множеств

$\bigcap$ знак пересечения множеств

$\subset$ знак подмножества ($A \subset B$ «*A* подмножество *B*»)

a^n степень (« число a в степени эн»)

$\sqrt[n]{a}$ корень («корень степени эн из числа a »)

$\log_a x$ логарифм («логарифм икс по основанию a»)

$\ln x$ «натуральный логарифм числа икс»

$\lg x$ «десятичный логарифм числа икс»

$n!$ «эн факториал»

a_n «a с индексом эн» или «a энное»

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ знак предела («предел a энного при эн стремящемуся к бесконечности»)

$y = f(x)$ игрек является функцией икс («игрек равен эф от икс»)

Δx приращение аргумента («дельта икс»)

y' ($\dot{y}$) первая производная игрек («игрек штрих»)

y'' ($\ddot{y}$) вторая производная игрек («игрек два штриха»)

$\frac{dy}{dx}$ первая производная игрек («дэ игрек по дэ икс»)

$\int\limits_a^b f(x)dx$ интеграл («интеграл от a до b эф от икс по дэ икс»)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сумма («сумма u_n от одного до бесконечности»)

$|a|$ знак модуля («модуль a»)

$||$ знак параллельности ($a \parallel b$ «прямая a параллельна прямой b»)

$\perp$ знак перпендикулярности ($a \perp b$ «прямая a перпендикулярна прямой b»)

a° a градусов (30° «тридцать градусов»)

a' a минут ($15'$ «пятнадцать минут»)

a'' a секунд ($19''$ «девятнадцать секунд»)

$\angle$ знак угла ($\angle A$ «угол *A*»)

$\vec{a}$ знак вектора («вектор a»)

$\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$ угол между векторами a и b

ΔABC «треугольник ABC»

P периметр (чего?)

l длина (чего?)

S площадь (чего?)

V объём (чего?)

H,h высота (чего?)

R, r радиус (чего?)

Приложение Б

Формулы тройных и половинных углов

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$ – синус тройного угла;

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$ – косинус тройного угла;

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha}$$ – тангенс тройного угла;

$$ctg 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$$ – котангенс тройного угла;

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos\alpha\right)}$$ – синус половинного угла;

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \cos\alpha\right)}$$ – косинус половинного угла;

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$ – тангенс половинного угла;

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$ – котангенс половинного угла.

Формулы понижения степени

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\alpha\right);\ \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos\alpha\right).$$

Формулы суммы (разности) тригонометрических функций

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$ – сумма синусов;

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$ – разность синусов;

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$ – сумма косинусов;

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$ – разность косинусов.

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$ – сумма (разность)

тангенсов; $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$ – сумма (разность) котангенсов.

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму (разность)

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right].$$

Формулы выражения тригонометрических функций через тангенс половинного угла

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Навчальне видання

КУЗНЕЦОВА Ганна Анатоліївна

МАТЕМАТИКА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для іноземних студентів підготовчого відділення
(Рос. мовою)

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*
Редактор *В. І. Шалда*
Комп'ютерне верстання *Г. А. Кузнецова*
Дизайн обкладинки *Т. А. Лазуренко*

Підп. до друку 10.04.2019. Формат 60 × 90/8.
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 25.
Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 5528 від 11.04.2017.